

MCD ED mcm TRA POLINOMI

COME PER I NUMERI ED I MONOMI, ANCHE PER I POLINOMI SI PUÒ CALCOLARE IL MASSIMO COMUN DIVISORE (MCD) E IL MINIMO COMUNE MULTIPLO (mcm). PER DETERMINARE IL MCD E IL mcm TRA 2 O PIÙ POLINOMI BISOGNA SCOMPORRE I POLINOMI IN FATTORI, CIOÈ OGNI UNO NEL PRODOTTO DI PIÙ POLINOMI (DI SOLITO BINOMI DI 1° GRADO) NON PIÙ SCOMPONIBILI E NUMERI. PER DETERMINARE IL MCD TRA DUE O PIÙ POLINOMI BISOGNA MOLTIPLICARE I FATTORI UGUALI CON L'ESPOLENTE PIÙ BASSO, E NEL CASO I POLINOMI SCOMPOSTI NON HANNO NULLA DI UGUALE ALLORA IL M.C.D. VALE 1.

PER DETERMINARE m.c.m. TRA DUE O PIÙ POLINOMI INVECE, UNA VOLTA SCOMPOSTI BISOGNA MOLTIPLICARE TUTTI I FATTORI UGUALI E NON, PRESI UNA SOLA VOLTA CON L'ESPOLENTE PIÙ GRANDE.

IN OGNI CASO QUINDI BISOGNA SCOMPORRE OGNI POLINOMIO NEL PRODOTTO TRA FATTORI IRRIDUCIBILI CIOÈ CHE NON SI POSSONO PIÙ SCOMPORRE.

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI DI CALCOLO DEL M.C.D. E DEL m.c.m. TRA GRUPPI DI POLINOMI:

1)

A) $x^2 - 1$

B) $x^2 - 2x + 1$

C) $3x - 3$

MCD ED mcm TRA POLINOMI

PROCEDIAMO CON LA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI:

A) IN QUESTO CASO SFRUTTIAMO I PRODOTTI NOTEVOLI, CIOÈ IL PRODOTTO DI SOMMA PER DIFFERENZA, CIOÈ

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

B) ANCHE IN QUESTO CASO SFRUTTIAMO I PRODOTTI NOTEVOLI CON IL QUADRATO DI BINOMIO, CIOÈ

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

C) IN QUESTO CASO INVECE RACCOGLIAMO SOLO IL 3, CIOÈ

$$3x - 3 = 3(x-1)$$

QUINDI:

$$\text{M.C.D.} = (x-1)$$

$$\text{m.c.m.} = 3(x-1)^2(x+1)$$

2)

A) $2x - 2$

$$2(x-1)$$

B) $5x - 5$

$$5(x-1)$$

C) $3x - 3$

$$3(x-1)$$

$$\text{M.C.D.} = (x-1)$$

$$\text{m.c.m.} = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (x-1) = 30(x-1)$$

3)

A) $x^2 + 5x + 4$

B) $x^2 + 8x + 16$

C) $x^2 + 4x$

MCD ED mcm TRA POLINOMI

A) $x^2 + 5x + 4$

$$P(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0 \quad (-1)$$

QUINDI LO SCOMPONIAMO DIVIDENDO PER
 $(x+1)$

	+1	+5	+4
-1		-1	-4
	+1	+4	0

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$$

B) $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

C) $x^2 + 4x = x(x+4)$

M.C.D. = $(x+4)$

m.c.m. = $x(x+1)(x+4)^2$

4

A) $6x^3$

B) $2x^3 + 8x^2 - 10x$

C) $x^5 + 5x^4 - 25x^3 - 125x^2$

A) $6x^3$

B) $2x^3 + 8x^2 - 10x = 2x(x^2 + 4x - 5)$

MA

$$x^2 + 4x - 5 \Rightarrow (1)^2 + 4(1) - 5 = 0 \quad (1)$$

QUINDI LO POSSIAMO SCOMPORRE DIVIDENDO PER
 $(x-1)$

MCD ED mcm TRA POLINOMI

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{x^2} + 4x - 5 & x-1 \\
 \underline{-\cancel{x^2} + x} & \\
 // \quad \cancel{5x} - 5 & x+5 \\
 \underline{-\cancel{5x} + 5} & \\
 // \quad // &
 \end{array}$$

COSÌ

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

E QVINDI

$$2x^3 + 8x^2 - 10x = \boxed{2x(x-1)(x+5)}$$

$$c) x^5 + 5x^4 - 25x^3 - 125x^2 = x^2(x^3 + 5x^2 - 25x - 125)$$

MA

$$x^3 + 5x^2 - 25x - 125 \Rightarrow (5)^3 + 5(5)^2 - 25(5) - 125 =$$

$$= \cancel{125} + \cancel{125} - \cancel{125} - \cancel{125} = 0$$

(5)

QVINDI LO DIVIDIAMO PER

$$(x-5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & +1 & +5 & -25 & -125 \\
 +5 & & +5 & +50 & +125 \\
 \hline
 & +1 & +10 & +25 & 0
 \end{array}$$

COSÌ

$$x^3 + 5x^2 - 25x - 125 = (x-5)(x^2 + 10x + 25)$$

DOVE ANCORA

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

MCD ED mcm TRA POLINOMI

QUINDI

$$x^5 + 5x^4 - 25x^3 - 125x^2 = x^2(x-5)(x+5)^2$$

IN CONCLUSIONE

A) $6x^3$

B) $2x^3 + 8x^2 - 10x = 2x(x-1)(x+5)$

C) $x^5 + 5x^4 - 25x^3 - 125x^2 = x^2(x-5)(x+5)^2$

M.C.D. = x

m.c.m. = $6x^3(x-1)(x-5)(x+5)^2$

5

A) $a^2 - b^2$

B) $a^3 - b^3$

C) $2a - 2b$

A) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

B) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

C) $2a - 2b = 2(a-b)$

M.C.D. = $(a-b)$

m.c.m. = $2(a-b)(a+b)(a^2 + ab + b^2)$

6

A) $a^3 - a$

B) $a^2 - 2a + 1$

C) $a^2 + a - 2$

MCD ED mcm TRA POLINOMI

$$A) a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a+1)(a-1)$$

$$B) a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

$$C) a^2 + a - 2 \Rightarrow (1)^2 + (1) - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & +2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2)$$

QUINDI:

$$M.C.D. = (a-1)$$

$$m.c.m. = a(a+1)(a-1)^2(a+2)$$

7

$$A) 3x^4 + 3x^3 - 6x^2$$

$$B) 2x^5 + 4x^4 - 6x^3$$

$$C) 6x^4 - 12x^3 + 6x^2$$

$$A) 3x^4 + 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 \Rightarrow (1)^2 + (1) - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} + x - 2 & x - 1 \\ -\cancel{x^2} + x & \hline // \quad \cancel{2x} - 2 & x + 2 \\ -\cancel{2x} + 2 & \\ // \quad // & \end{array}$$

MCD ED mcm TRA POLINOMI

ALLORA $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

QUINDI $3x^4 + 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x-1)(x+2)$

3) $2x^5 + 4x^4 - 6x^3 = 2x^3(x^2 + 2x - 3)$

$$x^2 + 2x - 3 \Rightarrow (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

(-3)

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 3 & x+3 \\ -x^2 - 3x & \hline \hline // & -x - 3 \\ & +x + 3 \\ \hline // & // \end{array}$$

ALLORA $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

QUINDI $2x^5 + 4x^4 - 6x^3 = 2x^3(x+3)(x-1)$

4) $6x^4 - 12x^3 + 6x^2 = 6x^2(x^2 - 2x + 1)$

MA $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

QUINDI

$$6x^4 - 12x^3 + 6x^2 = 6x^2(x-1)^2$$

IN CONCLUSIONE

$$\text{M.C.D.} = x^2(x-1)$$

$$\text{m.c.m.} = 6x^3(x-1)^2(x+2)(x+3)$$