

# DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

## DISEQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLUBILI CON I LOGARITMI

GRAZIE AI LOGARITMI, ANALOGAMENTE ALLE EQUAZIONI ESPONENZIALI, È POSSIBILE RISOLVERE QUELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI DIFFICILMENTE RICONDUCEBILI ALLA FORMA CANONICA, NELLE QUALI CIOÈ VI È UNA DISUGUAGLIANZA TRA POTENZE CON BASI DIVERSE, COME AD ESEMPIO:

$$a^{f(x)} \geq b^{g(x)}$$

oppure

$$a^{f(x)} \leq b^{g(x)}$$

MA NELL'IPOTESI CHE:

$$a^{f(x)} > 0$$

E

$$b^{g(x)} > 0$$

RISULTANO DEFINITI, CON  $C > 0$  E  $C \neq 1$ :

$$\log_C a^{f(x)}$$

E

$$\log_C b^{g(x)}$$

E PER LA "MONOTONIA" DELLA FUNZIONE LOGARITMO, RICORDANDO CHE SE  $C > 1$  LA FUNZIONE È CRESCENTE MENTRE SE  $0 < C < 1$  LA FUNZIONE È DECRESCENTE, È LECITO SCRIVERE CHE SE VALE:

$$a^{f(x)} \geq b^{g(x)}$$

oppure

$$a^{f(x)} \leq b^{g(x)}$$

ALLORA È EQUIVALENTE SCRIVERE:

$$\log_C a^{f(x)} \geq \log_C b^{g(x)}$$

oppure

$$\log_C a^{f(x)} \leq \log_C b^{g(x)}$$

SE  $C > 1$  (SI MANTIENE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE)

# DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

OPPURE È EQUIVALENTE SCRIVERE

$$\log_c a^{f(x)} \leq \log_c b^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad \log_c a^{f(x)} \geq \log_c b^{g(x)}$$

SE  $0 < c < 1$  (SI INVERTE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE)

ESEMPI

1)

$$5^x < 20$$

$$\log_5 5^x < \log_5 20$$

$$\times \log_5 5 < \log_5 20$$

$$\times < \log_5 20$$

2)

$$2^x < 4 \cdot 3^x$$

$$\ln 2^x < \ln(4 \cdot 3^x)$$

$$\times \ln 2 < \ln 4 + \ln 3^x$$

$$\times \ln 2 < \ln 4 + \times \ln 3$$

$$\times \ln 2 - \times \ln 3 < \ln 4$$

$$\times (\ln 2 - \ln 3) < \ln 4$$

QUESTA QUANTITÀ È SICURAMENTE NEGATIVA ESSENDO IL LOGARITMO NATURALE UNA FUNZIONE CRESCENTE QUINDI MOLTIPLICHIAMO TUTTO PER  $-1$  COSÌ

$$\times (\ln 3 - \ln 2) > -\ln 4$$

$$\times > \frac{-\ln 4}{\ln 3 - \ln 2} \approx -3,419$$

# DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

3)  $2^x + 5 \cdot 3^x > 2^{x+1}$

PRIMA DI UTILIZZARE I LOGARITMI BISOGNA TRASFORMARE ENTRAMBI I MEMERI IN PRODOTTI DI POTENZE:

$$2^x + 5 \cdot 3^x > 2^{x+1}$$

$$5 \cdot 3^x > 2^{x+1} - 2^x$$

$$5 \cdot 3^x > 2^x (2 - 1)$$

$$5 \cdot 3^x > 2^x$$

APPLICHIAMO QUINDI I LOGARITMI:

$$\ln(5 \cdot 3^x) > \ln 2^x$$

$$\ln 5 + \ln 3^x > \ln 2^x$$

$$\ln 5 + x \ln 3 > x \ln 2$$

$$x \ln 3 - x \ln 2 > -\ln 5$$

$$x(\ln 3 - \ln 2) > -\ln 5$$

$$x > \frac{-\ln 5}{\ln 3 - \ln 2} \approx -3,369$$

4)  $3^{2x+1} - 3^{2+x} + 6 \leq 0$

$$3 \cdot 3^{2x} - 3^2 \cdot 3^x + 6 \leq 0$$

$$\text{PONIAMO } 3^x = z \Rightarrow 3^{2x} = z^2 \text{ COSÌ}$$

$$3z^2 - 9z + 6 \leq 0$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$3z^2 - 9z + 6 = 0$$

# DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

$$\Delta = 81 - (4)(3)(6) = 81 - 72 = 9$$

$$z_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm 3}{6} = \begin{cases} \frac{9-3}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{9+3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$$



$$1 \leq z \leq 2$$

CIOE

$$1 \leq 3^x \leq 2$$

DALLA QUALE

$$\log_3 1 \leq \log_3 3^x \leq \log_3 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq \log_3 2$$

5)  $\frac{2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2}{1 - 3^x} > 0$

DISEQUAZIONE FRATTA QUINDI STUDIAMO NUMERATORE E DENOMINATORE

N)  $2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2 > 0$

$$3 \cdot 2^x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2^x \\ z^2 - 5z + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3z^2 - 5z + 2 > 0$$

$$\Delta = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{cioe } \begin{cases} z < \frac{2}{3} \vee z > 1 \\ 2^x < \frac{2}{3} \vee 2^x > 1 \end{cases}$$

QUINDI:

$$x < \log_2 \frac{2}{3} \vee x > 0$$

D)  $1 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 1$   
 $\Rightarrow x < 0$

IN DEFINITIVA:



$$\Rightarrow x < 1 - \log_2 3$$