

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

SI DICONO DISEQUAZIONI ESPONENZIALI TUTTE LE DISEQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA FIGURA NELL'ESPOLENTE DI QUALCHE POTENZA. SI CHIAMA FORMA CANONICA DELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI LA DISEQUAZIONE:

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

$$\text{(oppure } a^{f(x)} \leq a^{g(x)})$$

IN CUI NATURALMENTE LA DISEQUAGLIANZA PUÒ ANCHE ESSERE STRETTA (SENZA L'UGUALE) E DOVE $a > 0$ E $a \neq 1$

ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN x , CHE È UN NUMERO REALE QUALSIASI.

RICORDANDO CHE LA FUNZIONE ESPONENZIALE È UNA FUNZIONE MONOTONA, CIOÈ SEMPRE CRESCENTE O DECRESCENTE, ALLORA SE $a > 1$ (CRESCENTE):

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

oppure

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

È VERA SE E SOLO SE

$$f(x) \geq g(x)$$

oppure

$$f(x) \leq g(x)$$

MENTRE SE $0 < a < 1$ (DECRESCENTE):

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

oppure

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

È VERA SE E SOLO SE

$$f(x) \leq g(x)$$

oppure

$$f(x) \geq g(x)$$

CIOÈ IN QUESTO CASO, CON GLI ESPONENTI SI INVERTE IL SENSO DELLA DISEQUAGLIANZA.

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

ESEMPI

$$1) \quad 5^x < 25$$
$$5^x < 5^2$$

POICHÉ $5 > 1$ ($a > 1$) ALLORA SI MANTIENE IL VERSO,
QUINDI:

$$x < 2$$

$$2) \quad \frac{1}{3^x} \geq 3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

POICHÉ $0 < \frac{1}{3} < 1$ ($0 < a < 1$), ALLORA:

$$x \leq -1$$

$$3) \quad 2^x \leq \frac{3^{x+3}}{8}$$

$$8 \cdot 2^x \leq 3^{x+3}$$

$$2^3 \cdot 2^x \leq 3^{x+3}$$

$$2^{x+3} \leq 3^{x+3}$$

$$\frac{2^{x+3}}{3^{x+3}} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\Rightarrow x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

PER LE REGOLE SULLE POTENZE:
QUALSIASI POTENZA CON ESPONENTE
PARI A ZERO È SEMPRE UGUALE AD UNO

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

4) $4^{\frac{x}{2}+1} - 2^{x-1} < 56$

PER LE REGOLE DELLE POTENZE:
PRODOTTO E DIVISIONE TRA POTENZE CON
UGUALE BASE

$$2^{2(\frac{x}{2}+1)} - 2^{x-1} < 56$$

$$2^{x+2} - 2^{x-1} < 56 \Rightarrow 2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^{-1} < 56$$

$$\Rightarrow 2^x \left(2^2 - \frac{1}{2} \right) < 56$$

$$2^x \left(\frac{7}{2} \right) < 56$$

$$2^x < 56 \cdot \frac{2}{7}$$

$$2^x < 16 \Rightarrow 2^x < 2^4 \Rightarrow \boxed{x < 4}$$

5) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

PERCHÉ

$$(2^x)^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

$$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$$

PONIAMO $2^x = z$ E $2^{2x} = z^2$ COSÌ

$$z^2 - 10z + 16 < 0$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA: EQ. DI II° GRADO

$$z^2 - 10z + 16 = 0 \quad \Delta = 100 - 64 = 36 \quad z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} z=2 \\ z=8 \end{cases}$$

OTTENENDO COME SOLUZIONI IN z :

$$2 < z < 8$$

RICORDANDO CHE $z = 2^x$, ALLORA

$$2 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^3$$

E CIOÈ:

$$\boxed{1 < x < 3}$$

SI MANTENGONO I VERSI PERCHÉ $2 > 1$ ($a > 1$)!

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

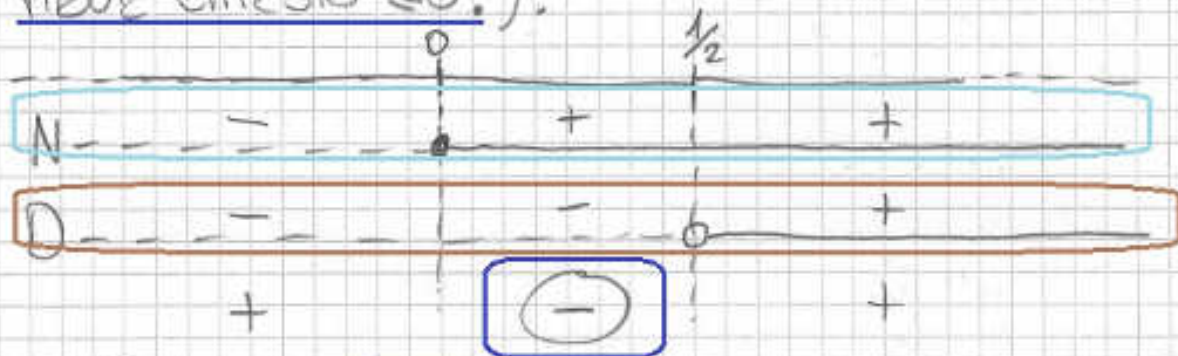
$$6) \frac{2^x - 1}{3^x - 3} \leq 0$$

POICHÉ È UNA DISEQUAZIONE FRAZIONARIA, STUDIAMO SEPARATAMENTE NUMERATORE E DENOMINATORE:

$$N \geq 0 \Rightarrow 2^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 1 \Rightarrow 2^x \geq 2^0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$D > 0 \Rightarrow 3^x - 3 > 0 \Rightarrow 3^x > 3^1 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

GRAFICAMENTE PRENDIAMO LE SOLUZIONI CHE RENDONO NEGATIVA LA NOSTRA FRAZIONE (PERCHÉ VIENE CHIESTO ≤ 0):



COSÌ:

$$0 \leq x < \frac{1}{2}$$