

DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

UNA DISEQUAZIONE PARAMETRICA È UNA DISEQUAZIONE NELLA QUALE OLTRE ALL'INCOGNITA COMPARE UNO O PIÙ PARAMETRI.

PER LA SUA RISOLUZIONE, OCCORRE AFFRONTARE UNA DISCUSSIONE PARAMETRICA PER CAPIRE PER QUALI VALORI DEL O DEI PARAMETRI ESSA AMMETTE SOLUZIONI, ESPLICITANDO LE EVENTUALI SOLUZIONI IN FUNZIONE DEL O DEI PARAMETRI.
NATURALMENTE IL DISCORSO VALE ANCHE PER LE EQUAZIONI PARAMETRICHE.

NON ESSENDO QVINDI, UN TIPO DI DISEQUAZIONE ELEMENTARE, NON ESISTE UN PROCEDIMENTO UNIVERSALE PER LA SUA RISOLUZIONE.

PER MEGLIO COMPRENDERE PARTIAMO CON UN SEMPLICE ESEMPIO DI DISEQUAZIONE PARAMETRICA DI II° GRADO.

VOGIAMO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$X^2 + 9kX + 8k^2 > 0 \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

PER PRIMA COSA CALCOLIAMO IL DELTA DELLA SUA EQUAZIONE ASSOCIATA, CIOÈ:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (9k)^2 - 4(1) \cdot (8k^2) = 81k^2 - 32k^2 = 49k^2$$

POSSIAMO SUBITO VERIFICARE CHE:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 49k^2 \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

CIOÈ IL DELTA È SEMPRE POSITIVO O AL MASSIMO UGUALE A 0 (PER $k=0$), QVINDI L'EQUAZIONE ASSOCIATA AMMETTERÀ 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE OPPURE

DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

2 SOLUZIONI COINCIDENTI (PER $k=0$) -

PASSIAMO QUINDI ALL'APPLICAZIONE DELLA FORMULA DI RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{49k^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm |7k|}{2}$$

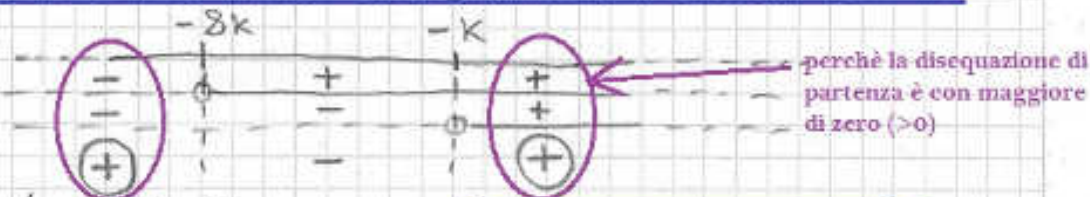
A QUESTO PUNTO PROCEDIAMO CON LA DISCUSSIONE PARAMETRICA:

1) SE $k > 0$

$$X_{1,2} = \frac{-9k \pm 7k}{2} = \begin{cases} \frac{-9k - 7k}{2} = \frac{-16k}{2} = -8k \\ \frac{-9k + 7k}{2} = \frac{-2k}{2} = -k \end{cases}$$

VISTO CHE k È POSITIVO $-8k$ SARÀ PIÙ PICCOLO DI $-k$

COSÌ:

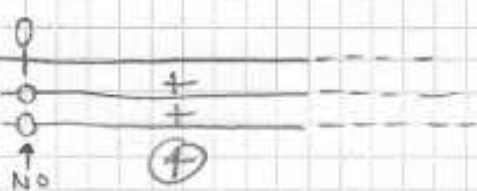


CIOÈ $\forall x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $x < -8k \cup x > -k$

2) SE $k = 0$

$$X_{1,2} = 0$$

CIOÈ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

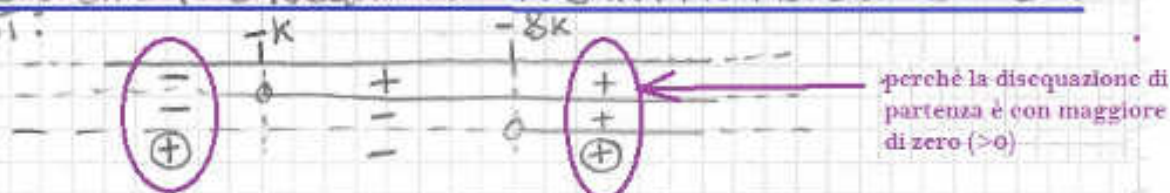


3) SE $k < 0$

$$X_{1,2} = \frac{-9k \pm (-7k)}{2} = \begin{cases} \frac{-9k - 7k}{2} = \frac{-16k}{2} = -8k \\ \frac{-9k + 7k}{2} = \frac{-2k}{2} = -k \end{cases}$$

VISTO CHE k È NEGATIVO $-k$ SARÀ PIÙ PICCOLO DI $-8k$

COSÌ:



DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

CIOÈ $\forall x \in \mathbb{R}$ TALE CHE $x < -k \cup x > -8k$
IN DEFINITIVA RIASSUMENDO IL TUTTO, DATA LA
DISEQUAZIONE:

$$x^2 + 8kx + 8k^2 > 0 \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

LE SOLUZIONI SONO:

$$\begin{cases} k > 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } x < -8k \cup x > -k \\ k = 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} - \{\emptyset\} \\ k < 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } x < -k \cup x > -8k \end{cases}$$

CONSIDERIAMO ADESSO UNA DISEQUAZIONE
ESPOENZIALE PARAMETRICA:

$$2^x > 3k - 1 \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

RIPRENDENDO LA FORMA CANONICA DELLE DISEQUAZIONI
ESPOENZIALI (CON IL VERSO DI MAGGIORE), CIOÈ:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

NEL NOSTRO ESEMPIO, AL PRIMO MEMBRO ABBIAMO
LA CLASSICA FUNZIONE ESPOENZIALE, MENTRE
AL SECONDO MEMBRO ABBIAMO UNA ESPRESSIONE
IN K NUMERO REALE, QUINDI SIAMO PER METÀ IN
FORMA CANONICA (PRIMO MEMBRO).

PROCEDIAMO ALLORA CON LA DISCUSSIONE
PARAMETRICA, SUPPONENDO CHE IL SECONDO
MEMBRO SIA UNA QUANTITÀ NON POSITIVA,
CIOÈ:

$$3k - 1 \leq 0$$

DISEQUAZIONI ESP. PARAMETRICHE

DA CUI:

$$3^k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3}$$

SAPENDO CHE LA FUNZIONE ESPONENZIALE
RESTITUISCE SEMPRE UN NUMERO REALE
STRETTAMENTE POSITIVO (>0), VEDI CODOMINIO
DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE, ALLORA IL PRIMO
MEMBRO SARÀ SEMPRE MAGGIORE DEL SECONDO
CHE ABBIAMO SUPPOSTO ≤ 0 , COSÌ LA DISEQUAZIONE
AMMETTERÀ COME SOLUZIONE QUALSIASI x
REALE (SE $k \leq \frac{1}{3}$).
DIVERSAMENTE SE:

$$3^k - 1 > 0 \Rightarrow 3^k > 1 \Rightarrow k > \frac{1}{3}$$

IL SECONDO MEMBRO SARÀ SEMPRE POSITIVO E
POSSIAMO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE MEDIANTE
L'APPLICAZIONE DEI LOGARITMI, CIOÈ RISCRIVENDOLA
COME:

$$\log_2 2^x > \log_2 (3^k - 1)$$

CIOÈ:

$$\cancel{x \cdot \log_2 2}^1 > \log_2 (3^k - 1)$$
$$x > \log_2 (3^k - 1)$$

DOVE IL LOGARITMO È SICURAMENTE DEFINITO PERCHÉ $3^k - 1 > 0$
IN DEFINITIVA LE SOLUZIONI SONO:

$$\begin{cases} k > \frac{1}{3} & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } x > \log_2 (3^k - 1) \\ k \leq \frac{1}{3} & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$