

DISEQUAZIONI LOG. PARAMETRICHE

COME PER LE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI PARAMETRICHE, ANCHE PER LE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE PARAMETRICHE OCCORRE AFFRONTARE UNA DISCUSSIONE PER VEDERE PER QUALI VALORI DEL O DEI PARAMETRI ESSA AMMETTE SOLUZIONI. VEDIAMO ALCUNI ESEMPI.

1) RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

$$\log_2 \frac{x+k}{2x-k} > 0 \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

PROCEDIAMO CON LA DISCUSSIONE PARAMETRICA:

CASO $k > 0$

C.A.

$$\frac{x+k}{2x-k} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x+k > 0 \\ 2x-k > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x > -k \\ x > \frac{k}{2} \end{matrix}$$



PASSIAMO ORA ALLA DISEQUAZIONE.

$$\log_2 \frac{x+k}{2x-k} > 0 \Rightarrow \log_2 \frac{x+k}{2x-k} > \log_2 1$$

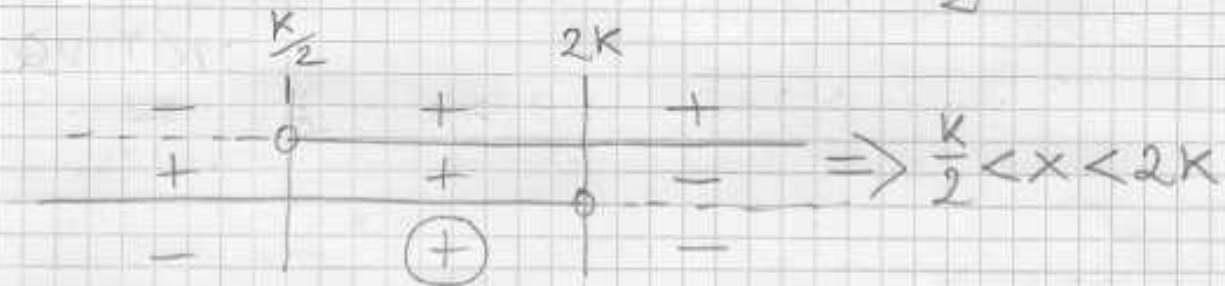
$$\frac{x+k}{2x-k} > 1$$

$$\frac{x+k}{2x-k} - 1 > 0$$

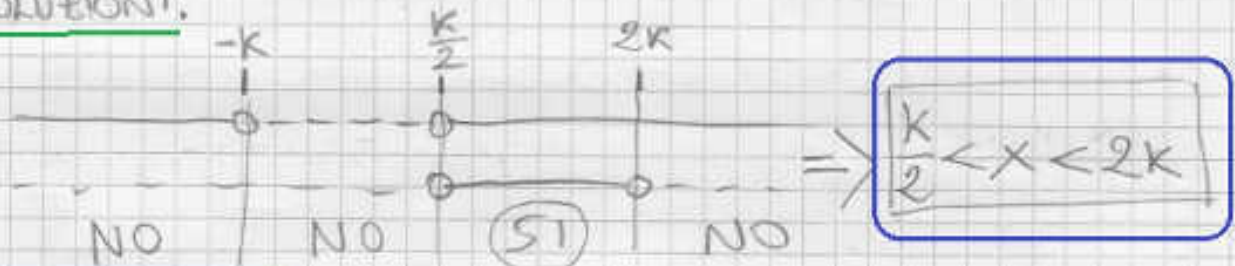
DISEQUAZIONI LOG. PARAMETRICHE

$$\frac{x+k-2x+k}{2x-k} > 0$$

$$\frac{-x+2k}{2x-k} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} -x+2k > 0 & \Rightarrow & x < 2k \\ 2x-k > 0 & \Rightarrow & x > \frac{k}{2} \end{matrix}$$



SOLUZIONI:



CASO $k=0$

SOSTITUENDO NELLA DISEQUAZIONE SI OTTIENE:

$$\log_2 \frac{x+0}{2x-0} > 0 \Rightarrow \log_2 \frac{x}{2x} > 0$$

$$\log_2 \frac{1}{2} > 0$$

IMPOSSIBILE

PERCHÉ:

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot \log_2 2 = -1 \cdot 1 = -1$$

E

$$-1 > 0 \quad \text{MAI}$$

DISEQUAZIONI LOG. PARAMETRICHE

CASO $k < 0$

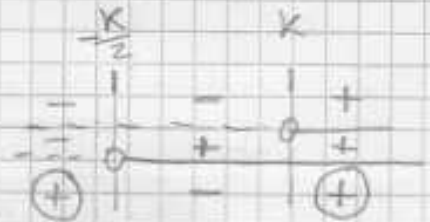
SOSTITUENDO NELLA DISEQUAZIONE:

$$\log_2 \frac{x-k}{2x+k} > 0$$

C.A.

$$\frac{x-k}{2x+k} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x-k > 0 \\ 2x+k > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x > k \\ x > -\frac{k}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x < -\frac{k}{2} \vee x > k$$



PASSO ALLA DISEQUAZIONE

$$\frac{x-k}{2x+k} > 1 \Rightarrow \frac{x-k-2x-k}{2x+k} > 0 \Rightarrow \frac{-x-2k}{2x+k} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} -x-2k > 0 \\ 2x+k > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x < -2k \\ x > -\frac{k}{2} \end{matrix} \Rightarrow -2k < x < -\frac{k}{2}$$

SOLUZIONI:



$$\Rightarrow -2k < x < -\frac{k}{2}$$

IN CONCLUSIONE LE SOLUZIONI SONO:

$$\left\{ \begin{array}{ll} k > 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } \frac{k}{2} < x < 2k \\ k = 0 & \text{IMPOSSIBILE} \\ k < 0 & \text{OGNI } x \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } -2k < x < -\frac{k}{2} \end{array} \right.$$

DISEQUAZIONI LOG. PARAMETRICHE

2) RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\log_k (4x^2 + 3x - 1) - \log_k x > 0$$

C.A. $\begin{cases} x > 0 \\ 4x^2 + 3x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \vee x > \frac{1}{4} \end{cases}$

Number line for $4x^2 + 3x - 1 > 0$: -1 0 $\frac{1}{4}$
 No No No (SI) $\Rightarrow x > \frac{1}{4}$

VISTO CHE IL PARAMETRO È LA BASE DEL LOGARITMO, ALLORA SI DISCUTONO SOLO 2 CASI:

CASO $0 < k < 1$

$$\log_k \frac{4x^2 + 3x - 1}{x} > 0$$

$$\begin{cases} \frac{4x^2 + 3x - 1}{x} > 0 \\ \frac{4x^2 + 3x - 1}{x} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4x^2 + 3x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 + 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \vee x > \frac{1}{4} \\ x < \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \vee 0 < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Number line for $0 < k < 1$: -1 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
 No No No No (SI) No $\Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

CASO $k > 1$

$$\begin{cases} \frac{4x^2 + 3x - 1}{x} > 0 \\ \frac{4x^2 + 3x - 1}{x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \vee x > \frac{1}{4} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < x < 0 \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Number line for $k > 1$: -1 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
 No No No No (SI) No $\Rightarrow x > \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

IN CONCLUSIONE, LE SOLUZIONI SONO:

$$\begin{cases} 0 < k < 1 & \text{ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \frac{1}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ k > 1 & \text{ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x > \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$