

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

SI DICONO DISEQUAZIONI LOGARITMICHE QUELLE
DISEQUAZIONI IN CUI L'INCIGNITA FIGURA
NELL'ARGOMENTO DI UNO O PIÙ LOGARITMI.

COME PER LE EQUAZIONI LOGARITMICHE, BISOGNA
TENER PRESENTE IL DOMINIO DELLA DISEQUAZIONE,
CIOÈ CHE I LOGARITMI IN ESSE PRESENTI SONO
DEFINITI SOLO PER ARGOMENTI POSITIVI.

SI CHIAMA **FORMA CANONICA** DELLE DISEQUAZIONI
LOGARITMICHE LA DISEQUAGLIANZA:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \text{ oppure } \log_a f(x) \leq \log_a g(x)$$

DOVE $a > 0$ E $a \neq 1$

ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN "X" CHE È
UN NUMERO REALE QUALSIASI, TALI CHE

$$f(x) > 0 \text{ E } g(x) > 0$$

PER LA "MONOTONIA" DELLA FUNZIONE LOGARITMO SI
AVRÀ

$$f(x) \geq g(x) \text{ oppure } f(x) \leq g(x)$$

SE LA BASE DEL LOGARITMO È MAGGIORE DI 1, $a > 1$
(CIOÈ SI MANTIENE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE).
MENTRE INVECE SI AVRÀ

$$f(x) \leq g(x) \text{ oppure } f(x) \geq g(x)$$

SE $0 < a < 1$ (CIOÈ SI INVERTE IL VERSO DELLA
DISEQUAZIONE).

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

ESEMPI

1) RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

$$\log_2(x-1) < 1 \Rightarrow \text{C.A. } x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

MEDIANTE LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO, ABBIAMO.

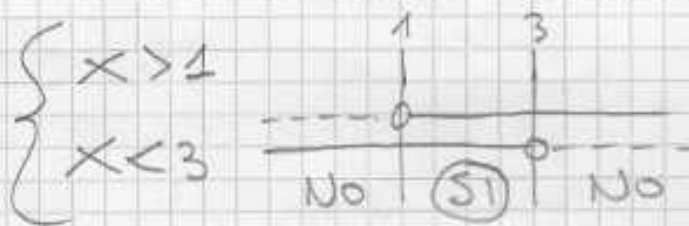
$$\log_2(x-1) < \log_2 2$$

VISTO CHE LA BASE DEL LOGARITMO È $2 > 1$, ALLORA SI MANTIENE IL VERSO, CIOÈ

$$(x-1) < 2$$

$$x < 3$$

A QUESTO PUNTO METTENDO A SISTEMA LE SOLUZIONI DEL DOMINIO (C.A. = CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ) E LE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE:



LE SOLUZIONI ACCETTABILI SONO:

$$1 < x < 3$$

2) $\log_2 x > 3 \Rightarrow \text{C.A. } x > 0$

$$\log_2 x > 3 \cdot 1$$

$$\log_2 x > 3 \cdot \log_2 2$$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$$\log_2 x > \log_2 2^3$$

$$x > 8$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} 0 & & 8 \\ \hline \text{No} & \text{No} & \text{SI} \end{array} \Rightarrow \boxed{x > 8}$$

$$3) \log_3 x + \log_3 (x-8) \geq 2$$

C.A.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \end{cases} \Rightarrow x > 8$$

QUINDI

$$\log_3 [x(x-8)] \geq \log_3 3^2$$

$$x(x-8) \geq 9$$

$$x^2 - 8x - 9 \geq 0 \quad \Delta = 100 \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} -1 & & 9 \\ \hline - & + & + \\ \hline + & - & + \end{array} \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 9$$

IN DEFINITIVA:

$$\begin{cases} x > 8 \\ -1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} -1 & & 8 & & 9 \\ \hline \text{No} & \text{No} & \text{No} & \text{SI} & \end{array} \Rightarrow \boxed{x \geq 9}$$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$$4) \log_5 x \leq 0 \quad \text{C.A. } x > 0$$

DALLE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI SAPPIAMO CHE:

$$5^{\log_5 x} = x$$

QUINDI RISCRIVIAMO LA DISEQUAZIONE COME FORMA CANONICA DI UNA DISEQUAZIONE ESPONENZIALE DI BASE 5, CIOÈ:

$$5^{\log_5 x} \leq 5^0$$

CIOÈ

$$x \leq 1$$

QUINDI:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 < x \leq 1}$$


N.B.

LO STESSO RAGIONAMENTO SI POTEVA FARE GRAFICAMENTE SULLA CURVA LOGARITMICA, PERCHÉ SE LA BASE È MAGGIORE DI 1, LA CURVA È NEGATIVA (≤ 0) QUANDO L'ARGOMENTO DEL LOGARITMO È COMPRESO TRA 0 ED 1.

$$5) \log(x^2 - 4x + 4) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

E LE SOLUZIONI ACCETTABILI SONO:

$$\boxed{1 \leq x < 2} \quad \vee \quad \boxed{2 < x \leq 3}$$