

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

SI DEFINISCONO **DISEQUAZIONI IRRAZIONALI** QUELLE DISEQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA COMPARE IN ALMENO UN POLINOMIO SOTTO RADICE.

LA LORO RISOLUZIONE DIPENDE DALL'INDICE DEL RADICALE, CIOÈ SE È PARI O DISPARI, DALLE CONSEGUENTI CONDIZIONI DI ESISTENZA E DALL'EVENTUALE PRESENZA DI 2 O PIÙ RADICALI, MEDIANTE LO STUDIO DI SISTEMI DI DISEQUAZIONI.

IN GENERALE SI ASSUME COME **FORMA NORMALE** DI UNA DISEQUAZIONE IRRAZIONALE UNA DELLE SEGUENTI:

$\sqrt[m]{A(x)} > B(x)$	$\sqrt[m]{A(x)} \geq B(x)$	$\sqrt[m]{A(x)} < B(x)$	$\sqrt[m]{A(x)} \leq B(x)$
-------------------------	----------------------------	-------------------------	----------------------------

DOVE $A(x)$ E $B(x)$ SONO ESPRESSIONI QUALSIASI CONTENENTI L'INCOGNITA x ED m È L'INDICE DELLA RADICE.

NATURALMENTE COME TUTTI GLI ALTRI TIPI DI DISEQUAZIONI SPESSO NON SI PRESENTANO DIRETTAMENTE IN FORMA NORMALE, MA IL PIÙ DELLE VOLTE BISOGNA RICONDURLE AD UNA DELLE FORME NORMALI MEDIANTE I **PRINCIPI DI EQUIVALENZA DELLE DISEQUAZIONI** ED IN QUESTO CASO BISOGNA RICORDARE DI IMPORRE SEMPRE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA PRIMA DI EFFETTUARE QUALSIASI CALCOLO.

UNA VOLTA OTTENUTA LA FORMA NORMALE BISOGNA PRESTARE ATTENZIONE ALL'INDICE DELLA RADICE SE È PARI O DISPARI, ED AL VERSO DELLA DISEQUAZIONE

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

MAGGIORE (o MAGGIORE UGUALE), MINORE (o MINORE UGUALE) -

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI CON UNA RADICE AD INDICE PARI

CASO 1:

$$\sqrt[m]{A(x)} > B(x)$$

IN QUESTO CASO LA DISEQUAZIONE SI RISOLVE CONSIDERANDO L'UNIONE DELLE SOLUZIONI DEI DUE SISTEMI:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^m \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

TUTTO QUESTO PERCHÉ NON SAPENDO SE $B(x)$ (SECONDO MEMBRO...) È POSITIVO, NULLO O NEGATIVO, COSÌ NEL PRIMO SISTEMA CONSIDERIAMO LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DELLA RADICE CON INDICE PARI, IL CASO IN CUI $B(x)$ È POSITIVO O NULLO E LA CONSEGUENZA CHE SE SONO VERE LE PRIME DUE ALLORA POSSIAMO ELEVARE AD m ENTRAMBI I MEMBRI COSÌ DA ELIMINARE LA RADICE.

SI PUÒ OSSERVARE ANCHE CHE L'ULTIMA CONDIZIONE DICE CHE $A(x)$ È MAGGIORE DI UNA POTENZA CON ESPONENTE PARI E BASE NON NEGATIVA (PERCHÉ $B(x) \geq 0$) E QUINDI LA PRIMA CONDIZIONE ($A(x) \geq 0$)

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

È IMPLICITAMENTE CONTEMPLATA, COSÌ DA POTER ESSERE TRALASCIATA ED IL SISTEMA SI RIDUCE A:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^m \end{cases}$$

NEL **SECONDO SISTEMA** INVECE CONSIDERIAMO SEMPRE LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DELLA RADICE CON INDICE PARI, IL CASO IN CUI $B(x)$ È NEGATIVO È NULLA PIÙ PERCHÉ SE $A(x) \geq 0$ E $B(x) < 0$ LA DISEQUAZIONE

$$\sqrt[m]{A(x)} > B(x)$$

È AUTOMATICAMENTE VERIFICATA -
IN CONCLUSIONE QUINDI

$$\boxed{\sqrt[m]{A(x)} > B(x) \text{ CON } m \text{ PARI}} \begin{matrix} \text{SEE} \\ \Longleftrightarrow \\ \text{SOLO SE} \end{matrix} \boxed{\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^m \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}}$$

CASO 2:

RAGIONANDO IDENTICAMENTE AL PRIMO CASO

$$\boxed{\sqrt[m]{A(x)} \geq B(x) \text{ CON } m \text{ PARI}} \begin{matrix} \text{SEE} \\ \Longleftrightarrow \\ \text{SOLO SE} \end{matrix} \boxed{\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^m \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

CASO 3:

$$\sqrt[m]{A(x)} < B(x)$$

IN QUESTO CASO LA DISEQUAZIONE SI RISOLVE MEDIANTE LA RISOLUZIONE DEL SEGUENTE SISTEMA:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^m \end{cases}$$

PERCHÉ CONSIDERIAMO LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DELLA RADICE CON INDICE PARI, E SE QUESTA È SODDISFATTA IL PRIMO MEMBRO DELLA DISEQUAZIONE

$$\sqrt[m]{A(x)} < B(x)$$

È SICURAMENTE UNA QUANTITÀ POSITIVA O NULLA, COSÌ IL SECONDO MEMBRO DOVRÀ ESSERE A SUA VOLTA UNA QUANTITÀ POSITIVA ($B(x) > 0$) ALTRIMENTI LA DISEQUAZIONE NON SAREBBE SICURAMENTE VERIFICATA (UNA QUANTITÀ POSITIVA O NULLA NON PUÒ ESSERE MINORE DI UNA QUANTITÀ NEGATIVA O NULLA...).

INFINE NELLA TERZA ELEVIAMO ENTRAMBI I MEMBRI AD m PER RIMUOVERE LA RADICE, COSÌ

$$\sqrt[m]{A(x)} < B(x)$$

CON m PARI

SE E
SOLO SE

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^m \end{cases}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

CASO 4:

RAGIONANDO IDENTICAMENTE AL TERZO CASO:

$$\sqrt[m]{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^m \end{cases}$$

CON M PARI

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI CON UNA RADICE AD INDICE DISPARI

VISTO CHE LE RADICI CON INDICE DISPARI NON NECESSITANO DI CONDIZIONI DI ESISTENZA, ALLORA:

$$\sqrt[m]{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow A(x) = [B(x)]^m$$

CON M DISPARI

ESEMPI

1) $\sqrt{4x-5} \geq 1$

$$\begin{cases} 1 \geq 0 & \text{SEMPRE} \\ 4x-5 \geq (1)^2 \end{cases}$$

$$4x-5 \geq 1$$

$$4x \geq 6$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

$$\cup \begin{cases} 4x-5 \geq 0 \\ 1 < 0 \end{cases} \quad \text{MAI}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

2) $2 < \sqrt{2-3x}$

$$2-3x > 2^2$$

$$2-3x > 4$$

$$3x < -2$$

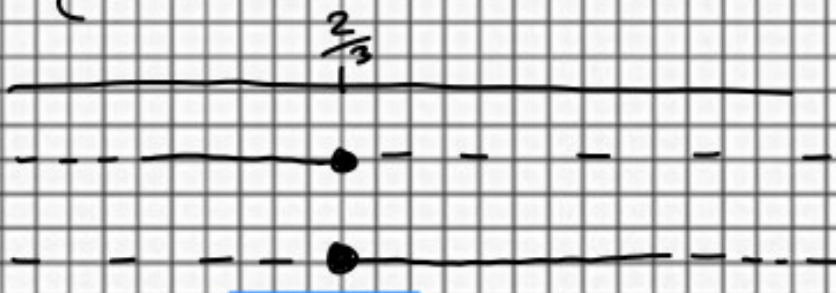
$$x < -\frac{2}{3}$$

3) $0 \geq \sqrt{2-3x}$

$$\begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 0 \geq 0 \\ 2-3x \leq 0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \leq 2 \\ 3x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$x = \frac{2}{3}$$

4) $\sqrt{\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}} > \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2}x > \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}x > \frac{3-4}{12}$$

$$x > -\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow x > -\frac{1}{18}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

5) $\sqrt{4-5x} < \sqrt{2}$

$$\begin{cases} 4-5x \geq 0 \\ \sqrt{2} > 0 \\ 4-5x < (\sqrt{2})^2 \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{4}{5} \\ 4-5x < 2 \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{4}{5} \\ x > \frac{2}{5} \end{cases} \quad \boxed{\frac{2}{5} < x \leq \frac{4}{5}}$$

6) $\sqrt{x^4+2x^3+x^2} > 2$

$$\begin{cases} x^4+2x^3+x^2 \geq 0 \\ x^4+2x^3+x^2 > 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(x^2+2x+1) \geq 0 \\ x^4+2x^3+x^2-4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \cup x^2+2x+1 \geq 0 \\ x^4+2x^3+x^2-4 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x^4+2x^3+x^2-4 > 0 \end{cases}$$

$$P(+1) = (+1)^4 + 2(+1)^3 + (+1)^2 - 4 = 0$$

1	2	1	0	-4
+1		1	3	4
	1	3	4	4
				0

 $\Rightarrow (x-1)(x^3+3x^2+4x+4) > 0$

$$P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$$

1	3	4	4
-2		-2	-2
	-2	-2	-4
	1	1	2
			0

 $\Rightarrow (x-1)(x+2)(x^2+x+2) > 0$

	-2	0	+1	
(x-1)	-	-	-	+
(x+2)	-	+	+	+
(x^2+x+2)	+	+	+	+
	+	-	+	+

$x < -2 \cup x > 1$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

7) $2\sqrt{\frac{x-9}{x-1}} > 3$

$$\sqrt{\frac{x-9}{x-1}} > \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \frac{x-9}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x-9}{x-1} > \frac{9}{4} \end{cases} \begin{cases} x \neq 1 \\ x < 1 \cup x \geq 9 \\ \frac{4x-36-9x+9}{x-1} > 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq 1 \\ x < 1 \cup x \geq 9 \\ \frac{-5x-27}{x-1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x < 1 \cup x \geq 9 \\ -\frac{27}{5} < x < 1 \end{cases}$$

$$-\frac{27}{5} < x < 1$$

8) $\sqrt[3]{x^3-8} < x-2$

$$x^3-8 < (x-2)^3$$

$$\cancel{x^3-8} < \cancel{x^3-6x^2+12x-8}$$

$$6x^2-12x < 0$$

$$6x^2-12x = 0$$

$$6x(x-2) = 0 \quad x=0 \quad x=2$$

$$0 < x < 2$$

9) $\sqrt[3]{x^3+19} - 1 > x \Rightarrow \sqrt[3]{x^3+19} > x+1$

$$x^3+19 > (x+1)^3 \Rightarrow \cancel{x^3+19} > \cancel{x^3+3x^2+3x+1}$$

$$3x^2+3x-18 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 15}{6} = \begin{matrix} -3 \\ +2 \end{matrix}$$

$$-3 < x < +2$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI CON DUE O PIÙ RADICALI

ANCHE IN QUESTO CASO LE DISEQUAZIONI POSSONO PRESENTARSI IN VARIE FORME.

VEDIAMO LA FORMA NORMALE PER I CASI PIÙ IMPORTANTI.

CASO 1:

$$\sqrt[m]{A(x)} \geq \sqrt[m]{B(x)}$$

M PARI

IN QUESTA SITUAZIONE CONSIDERIAMO LE CONDIZIONI DI ESISTENZA DELLE RADICI CON INDICE PARI (CIOÈ RADICANDI POSITIVI O UGUALI A ZERO), E POI ELEVIAMO AD m ENTRAMBI I MEMBRI IN MODO DA RIMUOVERE LE RADICI, CIOÈ:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B(x) \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO OSSERVARE CHE SE IL SEGNO DELLA DISEQUAZIONE È MAGGIORE ($>$) ALLORA SE $B(x)$ È POSITIVO E $A(x)$ È MAGGIORE DI $B(x)$ DI CONSEGUENZA IN MANIERA IMPLICITA $A(x)$ SARÀ MAGGIORE DI ZERO E LA PRIMA CONDIZIONE PUÒ ESSERE OMESSA.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

MENTRE SE IL SEGNO DELLA DISEQUAZIONE È MINORE ($<$) ALLORA SE $A(x)$ È POSITIVO E $A(x)$ È MINORE DI $B(x)$ DI CONSEGUENZA IN MANIERA IMPLICITA $B(x)$ SARÀ MAGGIORE DI ZERO E LA SECONDA CONDIZIONE PUÒ ESSERE OMESSA.

IN DEFINITIVA ALLORA

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{A(x)} &> \sqrt[m]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \\ \sqrt[m]{A(x)} &\geq \sqrt[m]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B(x) \end{cases} \end{aligned}$$

CON m PARI

INVECE

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{A(x)} &< \sqrt[m]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \\ \sqrt[m]{A(x)} &\leq \sqrt[m]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B(x) \end{cases} \end{aligned}$$

CON m PARI

m DISPARI

IN QUESTO CASO COME SAPPIAMO NON C'È BISOGNO DI IMPORRE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA DELLE RADICI PERCHÉ CON INDICE DISPARI I RADICALI POSSONO ESSERE QUANTITÀ NEGATIVE, NULLE O POSITIVE. BASTA SOLO ELEVARE AD m ENTRAMBI I MEMBRI DELLA DISEQUAZIONE IN MODO DA RIMUOVERE

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

LE RADICI, COSÌ:

$$\sqrt[m]{A(x)} \geq \sqrt[m]{B(x)} \Leftrightarrow A(x) \geq B(x)$$

m DISPARI

CASO 2:

$$\sqrt[m]{A(x)} \pm \sqrt[m]{B(x)} \pm \sqrt[m]{C(x)} \geq 0$$

LA RISOLUZIONE DI QUESTO TIPO DI EQUAZIONI PUÒ ESSERE MOLTO LUNGA E RICHIEDERE CALCOLI COMPLESSI. BISOGNA INNANZI TUTTO RICORDARE CHE SE m È PARI BISOGNA IMPORRE LE CONDIZIONI DI ESISTENZA DELLE RADICI AD INDICE PARI, QUINDI RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ C(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{SE } m \text{ È PARI}$$

MENTRE SE m È DISPARI NON C'È BISOGNO DELLE CONDIZIONI DI ESISTENZA E QUINDI DEL SISTEMA PRECEDENTE.

DETTO QUESTO SI PROCEDE CON L'ISOLARE UNO DEI RADICALI AL SECONDO MEMBRO IN MODO DA POTER ELEVARE TUTTO AD m E RITROVARE ALMENO AL SECONDO MEMBRO LA RADICE, MENTRE AL PRIMO MEMBRO SI AVRÀ LA POTENZA m -ESIMA DI UN BINOMIO,

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

QUADRATO DI BINOMIO SE $m=2$, CUBO DI BINOMIO SE $m=3$ E COSÌ VIA.

SVILUPPANDO QUESTI CALCOLI BISOGNA PROCEDERE A SCRIVERE LA DISEQUAZIONE IN UNA DELLE FORME GIÀ VISTE PER POI RISOLVERLA CON IL METODO CORRISPONDENTE ED ALLA FINE SE m È PARI VERIFICARE LE SOLUZIONI CON LE CONDIZIONI DI ESISTENZA.

ESEMPI

1] $\sqrt{x-2} < \sqrt{x-1}$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \cancel{x-2} < \cancel{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < 1 \end{cases}$$

$$x \geq 2$$

2] $\sqrt{x+2} < 3 - \sqrt{x+3}$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} < 3$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3})^2 < 3^2$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$x+2+x+3+2\sqrt{(x+2)(x+3)} < 9$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$2\sqrt{(x+2)(x+3)} < 4-2x$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

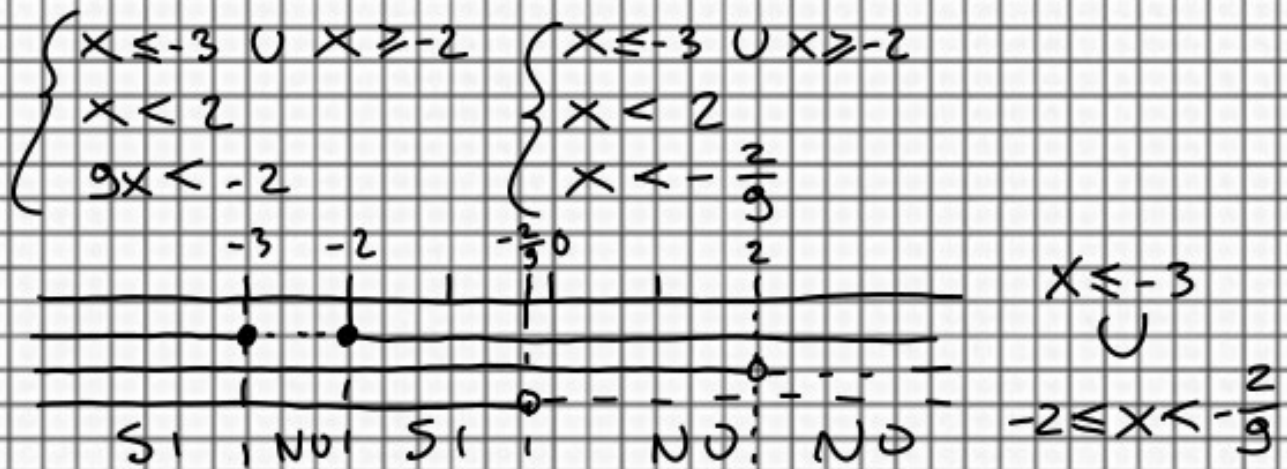
$$\sqrt{(x+2)(x+3)} < 2-x$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

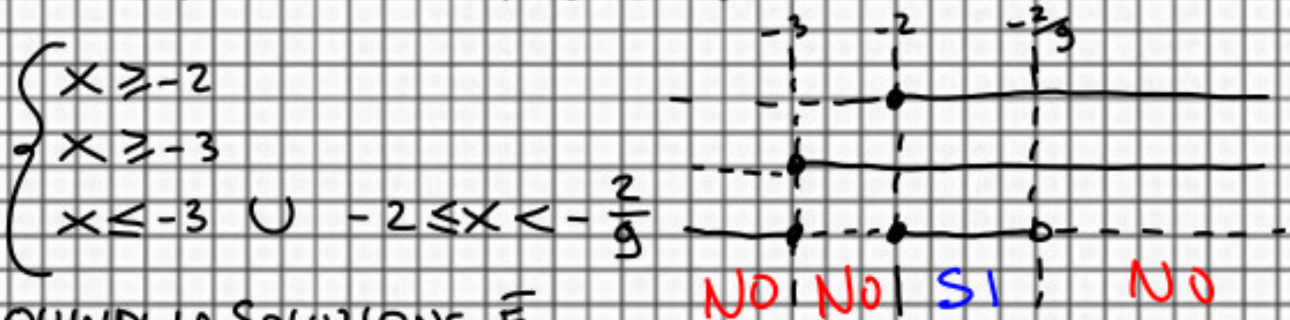
RISOLVIAMO LA NUOVA DISEQUAZIONE IRRAZIONALE

$$\sqrt{(x+2)(x+3)} < 2-x$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+3) \geq 0 \\ 2-x > 0 \\ (x+2)(x+3) < (2-x)^2 \end{cases} \begin{cases} x \leq -3 \cup x \geq -2 \\ x < 2 \\ \cancel{x^2 + 5x + 6} < \cancel{4 + x^2 - 4x} \end{cases}$$



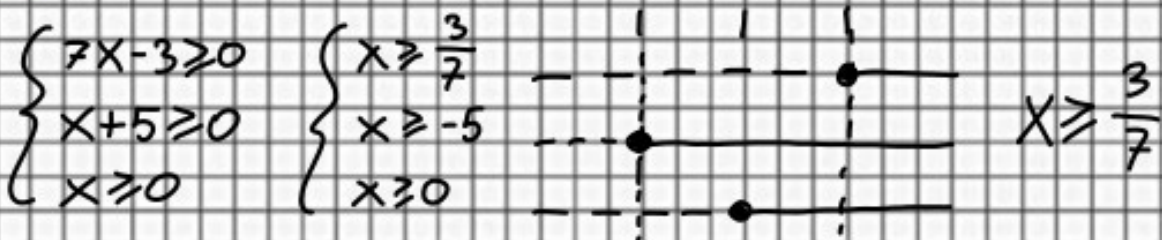
RITORNANDO ALLA DISEQUAZIONE DI PARTENZA



QUINDI LA SOLUZIONE È

$$\boxed{-2 \leq x < -\frac{2}{9}}$$

3) $\sqrt{7x-3} < \sqrt{x+5} + \sqrt{x}$



DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$$(\sqrt{7x-3})^2 < (\sqrt{x+5} + \sqrt{x})^2$$

$$7x-3 < x+5+x+2\sqrt{x(x+5)}$$

$$5x-8 < 2\sqrt{x(x+5)}$$

$$\sqrt{x(x+5)} > \frac{5}{2}x - 4$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x - 4 \geq 0 \\ (\sqrt{x(x+5)})^2 > (\frac{5}{2}x - 4)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x(x+5) \geq 0 \\ \frac{5}{2}x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x \geq 4 \\ x^2 + 5x > \frac{25}{4}x^2 + 16 - 20x \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + 5x \geq 0 \\ \frac{5}{2}x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{8}{5} \\ x^2 - 25\frac{1}{4}x^2 + 5x + 20x - 16 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq -5 \cup x \geq 0 \\ x < \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{8}{5} \\ 4x^2 - 25x^2 + 20x + 80x - 64 > 0 \end{cases} \cup x \leq -5 \cup 0 \leq x < \frac{8}{5}$$

$$-21x^2 + 100x - 64 > 0$$

$$21x^2 - 100x + 64 < 0$$

$$21x^2 - 100x + 64 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{4624}}{42} = \frac{100 \pm 68}{42} = \begin{cases} \frac{32}{42} = \frac{16}{21} \\ \frac{168}{42} = 4 \end{cases} \quad \frac{16}{21} < x < 4$$

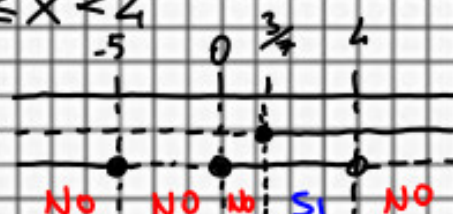
QUINDI:

$$\begin{cases} x \geq \frac{8}{5} \\ \frac{16}{21} < x < 4 \end{cases} \cup x \leq -5 \cup 0 \leq x < \frac{8}{5}$$

$$x \leq -5 \cup 0 \leq x < 4$$

COST:

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{7} \\ x \leq -5 \cup 0 \leq x < 4 \end{cases}$$



$$\frac{3}{7} < x < 4$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI CON DUE RADICALI CON INDICE DIVERSO

LA FORMA NORMALE IN QUESTO CASO È QUELLA IN CUI LA DISEQUAZIONE SI PRESENTA COME:

$$\sqrt[m]{A(x)} \gtrless \sqrt[n]{B(x)} \\ \text{CON } m \neq n$$

COME AL SOLITO ANCHE IN QUESTO CASO BISOGNA IMPORRE INNANZITUTTO LE CONDIZIONI DI ESISTENZA PER I RADICALI AD INDICE PARI PONENDO MAGGIORE UGUALE A ZERO I CORRISPONDENTI RADICANDI. PER LA LORO RISOLUZIONE INVECE, BISOGNA CONOSCERE BENE I PRODOTTI NOTEVOLI E SOPRATTUTTO LE PROPRIETÀ DEI RADICALI, CHE SPESSO CI FORNISCONO LA STRADA GIUSTA PER LA LORO RISOLUZIONE, SCEGLIENDO LA GIUSTA STRATEGIA COME AD ESEMPIO IL CALCOLO DEL M.C.M. DEGLI INDICI DEI RADICALI IN MODO DA POTERLI RISCRIVERE CON LO STESSO INDICE E POTER UTILIZZARE UNO DEI METODI GIÀ VISTI.

ESEMPI

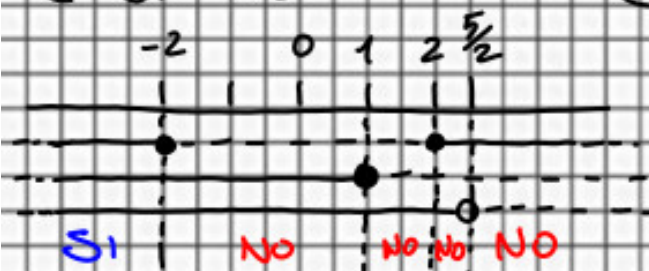
$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4} < \sqrt{1 - x}$$

$$\text{m.c.m.}(4, 2) = 4$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ (\sqrt[4]{x^2 - 4}) < [\sqrt[4]{(1-x)^2}] \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \cup x \geq +2 \\ x \leq 1 \\ x^2 - 4 < 1 + x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \cup x \geq +2 \\ x \leq 1 \\ 2x < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \cup x \geq +2 \\ x \leq 1 \\ x < \frac{5}{2} \end{cases}$$



$$x \leq -2$$

2) $\sqrt[4]{x^2 - 8} > \sqrt{x}$

m.c.m. (4, 2) = 4

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ (\sqrt[4]{x^2 - 8}) > (\sqrt[4]{x^2}) \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \cup x \geq +2\sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ x^2 - 8 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \cup x \geq +2\sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ -8 > 0 \text{ IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

NESSUNA SOLUZIONE

3) $\sqrt{1-x} > \sqrt[3]{1+x}$

m.c.m. (2, 3) = 6

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \sqrt[6]{(1-x)^3} > \sqrt[6]{(1+x)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ (1-x)^3 > (1+x)^2 \end{cases}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 1 - 3x + 3x^2 - x^3 > 1 + 2x + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -x^3 + 3x^2 - 3x + \cancel{1} - x^2 - 2x - \cancel{1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -x^3 + 2x^2 - 5x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x^3 - 2x^2 + 5x < 0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO LA 2ª DISEQUAZIONE

$$x^3 - 2x^2 + 5 < 0 \Rightarrow x \underbrace{(x^2 - 2x + 5)}_{F_1 \times F_2} < 0$$

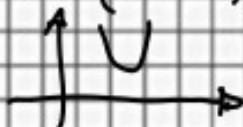
CIOÈ IL PRODOTTO DI 2 FATTORI È NEGATIVO SE I FATTORI HANNO SEGNO DISCORDE, QUINDI

$$\text{I } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + 5 < 0 \end{cases} \quad \text{II } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA ALLA DISEQUAZIONE DI 2º E

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \Delta = 4 - 20 = -16$$

IL CHE SIGNIFICA CHE TALE EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONI REALI E QUINDI GEOMETRICAMENTE LA PARABOLA DA ESSA RAPPRESENTATA NEL PIANO CARTESIANO, NON INTERSECA MAI L'ASSE DELLE ASCISSE (x) ED AVENDO CONCAVITÀ VERSO L'ALTO ($a > 0$) ALLORA SARÀ SEMPRE POSITIVA, CIOÈ:



DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

QUINDI RITORNANDO AI 2 SISTEMI PRECEDENTI:

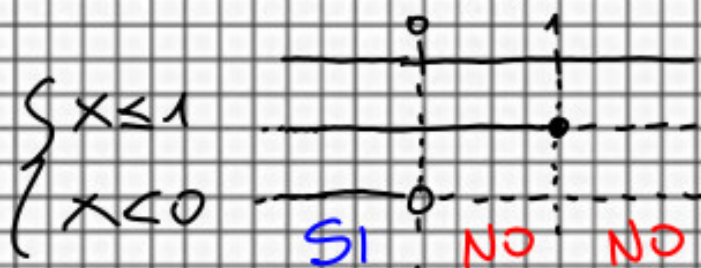
$$\text{I} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + 5 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \text{MAI} \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$$\text{II} \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \text{SEMPRE} \end{cases}$$

$$x < 0$$

E RITORNANDO ALLORA ALL'ESERCIZIO



$$x < 0$$