

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

①
LE EQUAZIONI AD UNA INCOGNITA, IN CUI LA INCOGNITA COMPARE CON ESPONENTE DI GRADO 2, SONO DETTE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO AD UNA INCOGNITA.

LA FORMA GENERALE CON CUI QUESTE VENGONO INDICATE È:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

DOVE "a" È IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 2° GRADO (L'INCOGNITA CON ESPONENTE 2...), "b" È IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 1° GRADO (L'INCOGNITA CON ESPONENTE 1...) E "c" È IL TERMINE NOTO (DETO ANCHE TERMINE DI GRADO 0). QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SI DIVIDONO IN DUE TIPI:

- EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

- EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE

NELL'INSIEME DEI NUMERI REALI,

IN ENTRAMBI I CASI, SE L'EQUAZIONE È RISOLVIBILE, CIOÈ NON È IMPOSSIBILE, AMMETTE SEMPRE 2 SOLUZIONI (DETE ANCHE ~~ERI~~ DELL'EQUAZIONE), CIOÈ 2 VALORI CHE SE SOSTITUITI ALLA X, RENDONO VERA L'EQUAZIONE STESSA, NEL SENSO CHE IL PRIMO MEMBRO DIVENTA PROPRIO UGUALE A ZERO.

EQUAZIONI DI 2° GRADO IN UNA INCOGNITA INCOMPLETE

IN QUESTO TIPO DI EQUAZIONI O È PRESENTE IL TERMINE DI 1° GRADO (L'INCOGNITA CON ESPONENTE 1) OPPURE È PRESENTE IL TERMINE NOTO, OPPURE SONO ASSENTI ENTRAMBI.

CIOÈ:

1) $aX^2 + c = 0$ DETA EQUAZIONE PURA

IN QUESTO CASO MANCA IL TERMINE DI 1° GRADO E LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO MEDIANTE

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

SEMPlici PASSAGGI ALGEBRICI:

$$aX^2 = -c$$

$$X^2 = \frac{-c}{a}$$

DAL RADICALE ALGEBRICO:

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$X_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$X_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

DALLE 2 SOLUZIONI SI EVIDENZIA IMMEDIATAMENTE CHE SE a e c HANNO LO STESSO SEGNO, ALLORA L'EQUAZIONE SI DICE IMPOSSIBILE IN $\mathbb{R}$ (CIOÈ NON AMMETTE SOLUZIONI REALI) MA 2 SOLUZIONI COMPLESSE.

ESEMPIO:

i) $3X^2 - 6 = 0$

$$3X^2 = 6$$

$$X^2 = \frac{6}{3} = 2$$

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{2}$$

$$X_1 = \sqrt{2}$$

$$X_2 = -\sqrt{2}$$

ii) $-4X^2 + 16 = 0$

$$-4X^2 = -16$$

$$4X^2 = 16$$

$$X^2 = \frac{16}{4} = 4$$

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{4}$$

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = -2$$

iii) $5X^2 + 10 = 0$

$$5X^2 = -10$$

$$X^2 = -\frac{10}{5} = -2$$

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{-2}$$

SOLUZIONI
COMPLESSE

(IMPOSSIBILE IN $\mathbb{R}$)

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$2) ax^2 + bx = 0 \quad \text{DETTA EQUAZIONE SPURIA}$$

IN QUESTO CASO MANCA IL TERMINE NOTO, E LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO MEDIANTE IL RACCOLTAMENTO A FATTOR COMUNE:

$$x(ax + b) = 0$$

PER LA LEGGE DELL'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO PONIAMO ENTRAMBI I FATTORI UGUAGLI A 0 (ZERO),

$$x = 0$$

CHE È GIÀ LA PRIMA SOLUZIONE, $x_1 = 0$

$$ax + b = 0$$

CHE È UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA

QUINDI:

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

CHE È LA SECONDA SOLUZIONE

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

ESEMPIO:

$$i) 2x^2 - 5x = 0$$

$$x(2x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{2}$$

$$ii) 3x^2 + 9x = 0$$

$$x(3x + 9) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$3x + 9 = 0 \quad 3x = -9$$

$$x_2 = -\frac{9}{3} = -3$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

3) $ax^2 = 0$ DETTA EQUAZIONE MONOMIA

IN QUESTO CASO MANCA SIA IL TERMINE DI 1° GRADO CHE IL TERMINE NOTO, E LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO CONSIDERANDO CHE:

$a \neq 0$ ALTRIMENTI L'EQUAZIONE NON ESISTEREBBE

ALLORA IL PRODOTTO È UGUALE A 0 (ZERO) SE E SOLTANTO SE

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

CIOÈ LE SOLUZIONI DI QUESTO TIPO DI EQUAZIONI, SONO SEMPRE NULLE.

EQUAZIONI DI 2° GRADO IN UNA INCOGNITA COMPLETE

IN QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SONO PRESENTI TUTTI I TERMINI, E L'EQUAZIONE SI PRESENTA NELLA CANONICA FORMA:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

DOVE SAPPIAMO CHE $a \neq 0$ ALTRIMENTI NON SAREBBE DI 2° GRADO.

IN QUESTO CASO LE 2 SOLUZIONI SI OTTENGONO MEDIANTE LA COSIDDETTA "FORMULA RISOLUTIVA DELLE EQUAZIONI DI 2° GRADO" (DETTA ANCHE FORMULA DEL DELTA).

INDICANDO CON LA LETTERA GRECA MAIUSCOLA Δ (DELTA) DETTO ANCHE DISCRIMINANTE, LA FORMULA RISOLUTIVA È:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DOVE:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

E CIOÈ:

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

IL DELTA VIENE DETTO DISCRIMINANTE, PERCHÉ IN BASE AL SUO SEGNO (POSITIVO, NEGATIVO O NULLO) SI OTTENGONO 3 TIPI DI VERSI DI SOLUZIONI.

⇒ DISCRIMINANTE PERCHÉ DISCRIMINA LE SOLUZIONI

1) DELTA POSITIVO ($\Delta > 0$)

SI OTTERRANNO 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE

2) DELTA NULLO ($\Delta = 0$)

SI OTTERRANNO 2 SOLUZIONI REALI COINCIDENTI (UGUALI)

3) DELTA NEGATIVO ($\Delta < 0$)

EQUAZIONE IMPOSSIBILE NELL'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$
NESSUNA SOLUZIONE REALE MA 2 SOLUZIONI COMPLESSE

ESEMPIO:

i) $x^2 - 7x + 10 = 0$ $a=1$ $b=-7$ $c=10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9$$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZIONI REALI E DISTINTE

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 5$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

ii) $25x^2 - 20x + 4 = 0$ $a=25$ $b=-20$ $c=4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4) = 400 - 400 = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 25} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$x_1 = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{2}{5}$$

iii) $3x^2 - x + 1 = 0$ $a=3$ $b=-1$ $c=1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(1) = 1 - 12 = -11$$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 SOLUZIONI COMPLESSE
NESSUNA SOLUZIONE REALE!

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA RISOLUTIVA

UNA DOMANDA CHE CI POSSIAMO PORRE È:
"DA DOVE ESCE LA FORMULA RISOLUTIVA DELLE
EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE?"
CERCHIAMO DI DARE UNA RISPOSTA, PARTEENDO
DALL'ESPRESSIONE GENERALE:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

È MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER IL
TERMINE $4a$, CIOÈ

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$4a(ax^2 + bx + e) = 4a \cdot 0$$

QUINDI OTTENIAMO

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ae = 0$$

A QUESTO PUNTO SOMMIAMO AD ENTRAMBI I MEMBRI ~~IL~~ IL TERMINE b^2 , CIOÈ

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ae + b^2 = 0 + b^2$$

DOVE, CAMBIANDO LEGGERMENTE L'ORDINE, OTTENIAMO:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ae = b^2$$

I PRIMI 3 TERMINI DEL PRIMO TERMINE RAPPRESENTANO IL QUADRATO DI UN BINOMIO, QUINDI POSSIAMO RISCRIVERE TUTTO COME:

$$(2ax + b)^2 + 4ae = b^2$$

CIOÈ

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ae$$

CONSIDERANDO IL RADICALE ALGEBRICO COME INVERSO DEL QUADRATO OTTENIAMO:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ae}$$

COSÌ:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ae}$$

E:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ae}}{2a}$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

PROPRIETÀ

SE IN UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO DELTA È POSITIVO (CIOÈ $\Delta \geq 0$), POSSIAMO SFRUTTARE LA RELAZIONE CHE ESISTE TRA LA SOMMA ED IL PRODOTTO DELLE SOLUZIONI ED I COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE.

CONSIDERIAMO LA GENERICA EQUAZIONE DI 2° GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0$$

SE

$$\Delta \geq 0$$

INDICANDO CON S LA SOMMA E P IL PRODOTTO DELLE SUE 2 SOLUZIONI REALI SI HA CHE:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

E

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

IN MODO CHE L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

PERCHÈ

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

E MOLTIPLICANDO TUTTO PER a SI OTTIENE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

DIMOSTRAZIONE DELLE RELAZIONI

SAPPIAMO CHE:

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{E} \quad X_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

SOMMA

CALCOLIAMO LA SOMMA

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}} - b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

PRODOTTO

CALCOLIAMO IL PRODOTTO

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \end{aligned}$$

IL NUMERATORE È LA SOMMA PER LA DIFFERENZA DI DUE MONOMI CHE DAI PRODOTTI NOTEVOLI SAPPIAMO ESSERE UGUALE ALLA DIFFERENZA DEI QUADRATI, COSÌ

$$= \frac{[b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2]}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a^2}c}{\cancel{4a^2}} = \boxed{\frac{c}{a}}$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

REGOLA DI CARTESIO

IN UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO SE DELTA È POSITIVO (CIOÈ $\Delta \geq 0$), SFRUTTANDO LA SUCCESSIONE DEI SEGNI DEI COEFFICIENTI a, b, c POSSIAMO DETERMINARE IL SEGNO DELLE SUE SOLUZIONI CONSIDERANDO CHE AD OGNI PERMANENZA DI SEGNO CORRISPONDE UNA SOLUZIONE NEGATIVA MENTRE AD OGNI VARIAZIONE DI SEGNO CORRISPONDE UNA SOLUZIONE POSITIVA, CIOÈ

$$+ax^2 + bx - c = 0$$

PERMANENZA VARIAZIONE
SOLUZIONE SOLUZIONE
NEGATIVA POSITIVA

ESEMPI

1] $x^2 - 5x + 6 = 0$

VAR VAR

2 SOLUZIONI POSITIVE ($x_1=2; x_2=3$)

2] $x^2 + 18x + 72 = 0$

PERT PERT

2 SOLUZIONI NEGATIVE ($x_1=-12; x_2=-6$)

3] $x^2 + x - 2 = 0$

PERT VAR

1 SOLUZIONE NEGATIVA ($x_1=-1; x_2=2$)
1 SOLUZIONE POSITIVA