

SI DEFINISCE **EQUAZIONE BINOMIA** QUELLA EQUAZIONE FORMATA DA UN POLINOMIO DI SOLI 2 TERMINI, UN TERMINE DI GRADO  $m$  ED UN TERMINE NOTO, DEL TIPO:

$$ax^m + b = 0$$

CON  $a \neq 0$   $b \neq 0$  ED  $m \geq 1$

SI PUÒ NOTARE CHE SE

- $m=1$  SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO
- $m=2$  SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO PURA
- $m \geq 3$  SI OTTIENE UNA EQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL 2°

NEI PRIMI DUE CASI SAPPIAMO GIÀ COME RISOLVERLA MENTRE SE  $m \geq 3$  ALLORA BISOGNA FARE ATTENZIONE ALLA PARITÀ O DISPARITÀ PROPRIO DI  $m$ , CONSIDERANDO SEPARATAMENTE I DUE DIVERSI CASI.

## CASO $m$ DISPARI

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE AMMETTE SEMPRE UNA ED UNA SOLA SOLUZIONE REALE CHE È

$$x = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}$$

CIOÈ

$$x = -\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$$

PERCHÉ DAI **RADICALI** SAPPIAMO CHE È SEMPRE POSSIBILE ESTRARRE LA RADICE CON INDICE DISPARI DI QUALSIASI NUMERO REALE, INDIPENDENTEMENTE DAL SUO SEGNO.

## CASO M PARI

IN QUESTO CASO SAPENDO CHE NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA RADICE CON INDICE PARI DI UN NUMERO NEGATIVO, BISOGNA DISTINGUERE LE SITUAZIONI IN CUI IL RADICANDO È NEGATIVO RISPETTO A QUELLE IN CUI È POSITIVO. VISTO CHE LA SOLUZIONE LA SI PUÒ ESPRIMERE SEMPRE COME:

$$X = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}$$

ALLORA POSSIAMO DIRE CHE SE I COEFFICIENTI  $a$  E  $b$  SONO DISCORDI (CIOÈ HANNO SEGNO DIVERSO)

LA QUANTITÀ  $-\frac{b}{a}$  SARÀ SICURAMENTE POSITIVA, L'EQUAZIONE AMMETTE DUE SOLUZIONI PERCHÉ ESISTONO SEMPRE DUE NUMERI OPPOSTI CHE ELEVATI AD UN ESPONENTE  $m$  PARI, SONO UGUALI AL RADICANDO  $-\frac{b}{a}$  (DA QUESTO IL  $\pm$ ) E TALI SOLUZIONI SARANNO ANCHE DISTINTE E OPPOSTE PERCHÉ PER IPOTESI  $b \neq 0$ , CHE SARANNO

$$X = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

MENTRE SE I COEFFICIENTI  $a$  E  $b$  SONO CONCORDI (CIOÈ HANNO STESSO SEGNO) LA QUANTITÀ  $-\frac{b}{a}$  SARÀ SICURAMENTE NEGATIVA E L'EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONI PERCHÉ COME SAPPIAMO NON È POSSIBILE ESTRARRE UNA RADICE CON INDICE PARI DI UN NUMERO NEGATIVO A MENO CHE NON SI FACCIA RICORSO ALL'UTILIZZO DEI NUMERI COMPLESSI.

## ESEMPI

1  $2x^6 - 54 = 0$   $m=6$  PARI  
 $2x^6 = 54 \Rightarrow x^6 = \frac{54}{2} \Rightarrow x^6 = 27$   
 $x = \pm \sqrt[6]{27} = \pm \sqrt[6]{3^3} = \pm \sqrt{3}$

2  $x^3 + 8 = 0$   $m=3$  DISPARI  
 $x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$

3  $x^4 - 4 = 0$   $m=4$  PARI  
 $x^4 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt[4]{2^2} = \pm \sqrt{2}$

4  $32x^5 - 1 = 0$   $m=5$  DISPARI  
 $x = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{2}$

5  $64x^6 + 1 = 0$   $m=6$  PARI  
 $x = \pm \sqrt[6]{-\frac{1}{64}}$  IMPOSSIBILE (NESSUNA SOLUZIONE REALE)

6  $4x^5 - 2 = 0$   $m=5$  DISPARI  
 $x = \sqrt[5]{\frac{2}{4}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

7  $36x^4 - 81 = 0$   $m=4$  PARI  
 $x = \pm \sqrt[4]{\frac{81}{36}} = \pm \sqrt[4]{\frac{3^4}{2 \cdot 3}} = \pm \sqrt[4]{\frac{3^3}{2}} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

## EQUAZIONI BIQUADRATICHE

SI DEFINISCE **EQUAZIONE BIQUADRATICA** QUELLA EQUAZIONE FORMATA DA UN TRINOMIO IN UNA INCOGNITA CON UN TERMINE DI 4° GRADO, UNO DI 2° GRADO E UN TERMINE NOTO, CIOÈ:

$$aX^4 + bX^2 + c = 0$$

PER RISOLVERE QUESTO TIPO DI EQUAZIONI SI PROCEDE CON UNA TRASFORMAZIONE DELL'INCOGNITA OTTENENDO UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO.

PONENDO AD ESEMPIO:

$$X^2 = Z$$

IN MODO CHE

$$X^4 = (X^2)^2 = Z^2$$

L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

CHE È UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO NELLA VARIABILE Z. A QUESTO PUNTO SI RISOLVE L'EQUAZIONE DI 2° GRADO OTTENENDO 2 SOLUZIONI  $Z_1$  E  $Z_2$ .

SI SOSTITUISCONO I VALORI DI TALI SOLUZIONI NELLA EQUAZIONE POSTA INIZIALMENTE E SI PROCEDE A RISOLVERE LE 2 EQUAZIONI

$$X^2 = Z_1$$

E

$$X^2 = Z_2$$

OTTENENDO COSÌ LE **4 SOLUZIONI** DELLA EQUAZIONE BIQUADRATICA DI PARTENZA LE QUALI POSSONO ESSERE REALI O COMPLESSE.

# ESEMPI

1)  $4x^4 - 11x^2 - 3 = 0$

$z = x^2$

$4z^2 - 11z - 3 = 0$

$z_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4(4)(-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8} = \begin{cases} \frac{24}{8} = 3 \\ \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$

QUINDI:

a)  $x^2 = -\frac{1}{4}$  NESSUNA SOLUZIONE REALE (2 COMPLESSE)

b)  $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$  2 SOLUZIONI REALI

2)  $4x^2 - 5x^2 + 1 = 0$

$z = x^2$

$4z^2 - 5z + 1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(1)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \frac{8}{8} = 1 \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

4 SOLUZIONI REALI

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

3)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$z = x^2$

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

## EQUAZIONI TRINOMIE

SI DEFINISCE **EQUAZIONE TRINOMIA** QUELLA EQUAZIONE FORMATA DA UN TRINOMIO IN UNA INCOGNITA CON UN TERMINE DI GRADO  $2m$ , UNO DI GRADO  $m$  ED UN TERMINE NOTO, CIOÈ:

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

SI PUÒ IMMEDIATAMENTE OSSERVARE COME LE EQUAZIONI BIQUADRATICHE SONO UN CASO PARTICOLARE DI EQUAZIONI TRINOMIE CON  $m=2$ .

ANCHE IN QUESTO CASO PER PROCEDERE ALLA LORO RISOLUZIONE BASTA UNA TRASFORMAZIONE DELL'INCOGNITA OTTENENDO UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO, PONENDO

$$x^m = z$$

IN MODO CHE

$$x^{2m} = (x^m)^2 = z^2$$

E L'EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$az^2 + bz + c = 0$$

RISOLVENDO QUINTI L'EQUAZIONE DI 2° GRADO SI OTTENGONO 2 SOLUZIONI  $z_1$  E  $z_2$  CHE A LORO VOLTA CI PORTANO A RISOLVERE 2 EQUAZIONI BINOMIE:

$$x^m = z_1$$

E

$$x^m = z_2$$

# ESEMPIO

1)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

$z = x^3$

$z^2 - 7z - 8 = 0$

$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-8)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{7-9}{2} = -1 \\ \frac{7+9}{2} = 8 \end{cases}$

così:

2)  $x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1$

b)  $x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

2)  $x^6 + 13x^3 + 40 = 0$

$z = x^3$

$z^2 + 13z + 40 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{(13)^2 - 4(1)(40)}}{2} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-13 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-13-3}{2} = -8 \\ \frac{-13+3}{2} = -5 \end{cases}$

$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$

$x^3 = -5 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{5}$

3)  $x^8 - 4x^4 + 3 = 0$

$z = x^4$

$z^2 - 4z + 3 = 0 \quad z_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$

$x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$

$x^4 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{3}$

4)  $-3x^{12} - 3x^6 + 6 = 0$

$z = x^6$

$-3z^2 - 3z + 6 = 0$

$z_1 = 1$

$z_2 = -2$

$x^6 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[6]{1} = \pm 1$

$\cup x^6 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-2}$

QUI NESSUNA  
SOLUZIONE  
REALE

## DISEQUAZIONI BINOMIE

COME PER LE EQUAZIONI BINOMIE ANCHE IN QUESTO CASO PER PROCEDERE ALLA RISOLUZIONE BISOGNA DISTINGUERE I CASI IN CUI  $m$  È PARI O DISPARI. CONSIDERATA LA GENERICA DISEQUAZIONE BINOMIA

$$x^m + b \geq 0$$

oppure

$$x^m + b \leq 0$$

### SE $m$ È DISPARI

SI PROCEDE CON UN UNICO METODO, CIOÈ SI ISOLA LA  $x$  AL PRIMO MEMBRO E SI ESTRAE LA RADICE CON INDICE  $m$  DI ENTRAMBI I MEMBRI, CIOÈ AD ESEMPIO:

$$x^3 + 27 > 0 \Rightarrow x^3 > -27 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} > \sqrt[3]{-27} \Rightarrow x > \sqrt[3]{-27} \Rightarrow x > -3$$

oppure

$$x^3 - 27 < 0 \Rightarrow x^3 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{27} \Rightarrow x < \sqrt[3]{27} \Rightarrow x < 3$$

### SE $m$ È PARI

SI PROCEDE CON LA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE BINOMIA ASSOCIATA CONSIDERANDO LE SUE SOLUZIONI E ADOTTANDO LO STESSO METODO RISOLUTIVO DELLE DISEQUAZIONI DI 2° GRADO, COME AD ESEMPIO:

$$x^4 - 16 > 0 \Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \\ x = \pm \sqrt[4]{2^4} \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x < -2 \cup x > +2$$

oppure

$$x^4 - 16 \leq 0 \quad x = \pm 2 \quad -2 \leq x \leq +2$$

oppure

# EQUAZ. DISEQUAZ. BINOMIE BIQUADRATICHE TRINOMIE

$$x^4 + 16 \geq 0$$

OPPURE

$$x^4 + 16 < 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$  PERCHÉ SOMMA DI QUANTITÀ SEMPRE POSITIVE

NESSUNA SOLUZIONE PERCHÉ IL PRIMO MEMBRO È SEMPRE POSITIVO

## ESEMPI

1]  $x^4 - 1 < 0$

$$x^4 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$-1 < x < +1$$

2]  $x^6 - 64 \geq 0$

$$x^6 - 64 = 0$$

$$x^6 = 64$$

$$x = \pm \sqrt[6]{64} = \pm \sqrt[6]{2^6} = \pm 2$$

$$x \leq -2 \cup x \geq +2$$

3]  $x^3 + 1 \leq 0$

$$x^3 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{x^3} \leq \sqrt[3]{-1}$$

$$x \leq -1$$

4]  $x^4 - 81 < 0$

$$x^4 - 81 = 0$$

$$x^4 = 81$$

$$x = \pm \sqrt[4]{81} = \pm \sqrt[4]{3^4} = \pm 3$$

$$-3 < x < +3$$

5]  $x^5 + 32 < 0$

$$x^5 < -32$$

$$\sqrt[5]{x^5} < \sqrt[5]{-32}$$

$$x < -2$$

$$6) \quad x^6 + 1 \geq 0 \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$$7) \quad x^{10} + 100 < 0 \quad \boxed{\text{IMPOSSIBILE}}$$

## DISEQUAZIONI BIQUADRATICHE E TRINOMIE

PER RISOLVERE UNA DISEQUAZIONE BIQUADRATICA O PIÙ IN GENERALE TRINOMIA:

- 1) SI SOSTITUISCE L'INCOGNITA ALLO STESSO MODO FATTO PER LE EQUAZIONI BIQUADRATICHE E TRINOMIE.
- 2) SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO NELLA NUOVA INCOGNITA.
- 3) NELLE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE DI 2° GRADO SI RISOSTITUISCE L'INCOGNITA DELLA DISEQUAZIONE BIQUADRATICA O TRINOMIA.
- 4) SI RISOLVONO LE DISEQUAZIONI BINOMIE OTTENUTE.

### ESEMPI

$$1) \quad x^4 - 2x^2 + 1 \leq 0 \quad z = x^2$$

$$z^2 - 2z + 1 \leq 0$$

$$z^2 - 2z + 1 = 0 \quad z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad z = 1$$

$$x^2 = 1 \quad \boxed{x = \pm 1}$$

$$2) \quad x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0 \quad z = x^2$$

$$z^2 - 3z - 4 \geq 0$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0 \quad z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3-5}{2} = -1 \\ \frac{3+5}{2} = +4 \end{cases}$$

$$z \leq -1 \quad \cup \quad z \geq +4$$

COST

$$x^2 \leq -1$$

U

$$x^2 \geq +4$$

$$x^2 + 1 \leq 0$$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

MAI

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x \leq -2 \cup x \geq +2$$

3]  $x^6 - 15x^3 + 56 < 0$

$$z = x^3$$

$$z^2 - 15z + 56 < 0$$

$$z^2 - 15z + 56 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2} = \begin{cases} \frac{15}{2} = 7 \\ \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$$

$$7 < z < 8$$

$$7 < x^3 < 8$$

$$\sqrt[3]{7} < x < \sqrt[3]{8} \Rightarrow \sqrt[3]{7} < x < 2$$

4]  $x^8 - 21x^4 + 80 \geq 0$

$$z = x^4$$

$$z^2 - 21z + 80 \geq 0$$

$$z^2 - 21z + 80 = 0$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 5 \\ 16 \end{cases}$$

$$z \leq 5$$

U

$$z \geq 16$$

$$x^4 \leq 5$$

$$x^4 \geq 16$$

$$x^4 - 5 \leq 0$$

$$x^4 - 16 \geq 0$$

$$x = \pm \sqrt[4]{5}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$$

$$-\sqrt[4]{5} \leq x \leq +\sqrt[4]{5}$$

$$x \leq -2 \cup x \geq +2$$

E QUINDI

$$x \leq -2 \cup -\sqrt[4]{5} \leq x \leq +\sqrt[4]{5} \cup x \geq +2$$