

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

UN METODO DI SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI È QUELLO CHE SI AVVALE DELLA REGOLA DI RUFFINI. SAPPIAMO CHE CON TALE REGOLA È POSSIBILE EFFETTUARE LA DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN BINOMIO DI PRIMO GRADO IN MODO CHE POSSIAMO SCRIVERE

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R$$

DOVE

$P(x)$ POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO m

$D(x)$ POLINOMIO DIVISORE DI GRADO 1

$Q(x)$ POLINOMIO QUOZIENTE DI GRADO $m-1$

R UN NUMERO

E SE IL DIVIDENDO È DIVISIBILE PER IL DIVISORE LA DIVISIONE SARÀ ESATTA ED IL RESTO SARÀ ZERO, CIOÈ $R=0$.

QUINDI SE ABBIAMO UN POLINOMIO CHE NON È SCOMPONIBILE MEDIANTE I METODI TRADIZIONALI COME AD ESEMPIO I PRODOTTI NOTEVOLI, BASTA TROVARE UN BINOMIO DI 1° GRADO PER IL QUALE È DIVISIBILE E RISCRIVERLO SCOMPOSTO MEDIANTE LA REGOLA DI RUFFINI.

PER TROVARE TALE BINOMIO CI AVVALIAMO DELLA REGOLA DELL'ALGEBRA SECONDO LA QUALE PER UN POLINOMIO DI GRADO m , LE EVENTUALI RADICI (CIOÈ QUEI VALORI CHE SOSTITUITI ALLA SUA VARIABILE LO RENDONO

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

NULLO, CIOÈ UGUALE A ZERO) SE ESISTONO SONO DA RICERCARE NELLA FRAZIONE:

$$\frac{p}{q}$$

DOVE

p È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL TERMINE NOTO
E
 q È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO

QUESTA REGOLA È CONOSCIUTA CON IL NOME DI TEOREMA DELLE RADICI RAZIONALI.

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO IL POLINOMIO:

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

IN CUI

TERMINE NOTO +3

COEFFICIENTE TERMINE GRADO MASSIMO +2

QUINDI

DIVISORI DI +3 SONO -1; +1; -3; +3

DIVISORI DI +2 SONO -1; +1; -2; +2

COSÌ SE ESISTONO LE RADICI RAZIONALI DEL POLINOMIO VANNO CERCATE TRA

$$\left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2} \right\}$$

SOSTITUIAMO TALI VALORI AL POSTO DELLA x NEL POLINOMIO E VEDIAMO QUALE VALORE LO ANNULLA CIOÈ LO RENDE UGUALE A ZERO.

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

$$P(-1) = 2(-1)^4 + 5(-1)^3 - 5(-1)^2 - 5(-1) + 3 = \\ = 2 - 5 - 5 + 5 + 3 = -3 + 3 = 0 \quad \text{È RADICE}$$

A QUESTO PUNTO VISTO CHE ABBIAMO TROVATO LA RADICE CI POSSIAMO FERMARE NELLA RICERCA, E SCRIVERE IL BINOMIO DI 1° GRADO CHE UTILIZZEREMO NELLA REGOLA DI RUFFINI, CIOÈ:

$$(X - \text{radice}) = (X - (-1))$$

QUINDI:

$$(X+1)$$

SCOMPONIAMO ALLORA IL POLINOMIO $P(x)$ EFFETTUANDO LA DIVISIONE CON LA REGOLA DI RUFFINI:

$$(2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3) : (x+1)$$

VISTO CHE IL POLINOMIO È GIÀ COMPLETO ED ORDINATO IMPOSTIAMO LA TABELLA ED ESEGUIAMO LA DIVISIONE:

	+2	+5	-5	-5	+3
-1		-2	-3	+8	-3
	+2	+3	-8	+3	0

$R=0$ PERCHÉ COME SAPPIAMO $(x+1)$ È DIVISORE DI $P(x)$

MENTRE

$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$$

COSÌ SE

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R$$

ALLORA

$$P(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 - 8x + 3)$$

ASSUMENDO ADESSO IL POLINOMIO QUOZIENTE COME IL

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$$

RIPETIAMO IL PROCEDIMENTO PARTENDO DALLA RICERCA DI SUOI EVENTUALI ZERI, CIOÈ

TERMINE NOTO +3

COEFFICIENTE TERMINE DI GRADO MASSIMO +2

QUINDI

DIVISORI DI +3 SONO -1; +1; -3; +3

DIVISORI DI +2 SONO -1; +1; -2; +2

COSÌ LE EVENTUALI RADICI VANNO CERCALE TRA

$$\left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2} \right\}$$

LI SOSTITUIAMO UNO AD UNO NEL NUOVO POLINOMIO AL POSTO DELLA X E VEDIAMO QUALE LO ANNULLA:

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 8(-1) + 3 = \\ &= -2 + 3 + 8 + 3 = 12 \quad \text{NON È RADICE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1) &= 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = \\ &= 2 + 3 - 8 + 3 = 0 \quad \text{È RADICE} \end{aligned}$$

SCRIVIAMO IL BINOMIO DI 1° GRADO

$$(x - \text{radice}) = (x - 1)$$

E PROCEDIAMO NUOVAMENTE A CALCOLARE MEDIANTE LA REGOLA DI RUFFINI LA DIVISIONE:

$$(2x^3 + 3x^2 - 8x + 3) : (x - 1)$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

IL POLINOMIO È GIÀ ORDINATO E COMPLETO, COSÌ

	+2	+3	-8	+3
+1		+2	+5	-3
	+2	+5	-3	0

COSÌ

$$(2x^3 + 3x^2 - 8x + 3) = (x-1)(2x^2 + 5x - 3)$$

QUINDI RITORNANDO AL POLINOMIO DI PARTENZA AVREMO:

$$P(x) = (x+1)(x-1)(2x^2 + 5x - 3)$$

ASSUMIAMO ADESSO COME NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE

$$2x^2 + 5x - 3$$

E RIPETIAMO IL PROCEDIMENTO.

DIVISORI TERMINE NOTO $\pm 1; \pm 3$

DIVISORI COEFFICIENTE DI GRADO MASSIMO $\pm 1; \pm 2$

QUINDI LE POSSIBILI RADICI SONO:

$$\left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2} \right\}$$

VERIFICHIAMO QUALE È RADICE DEL NUOVO POLINOMIO CIOÈ CHE LO ANNULLA:

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3 = 2 - 5 - 3 = -6 \text{ NON È RADICE}$$

$$P(1) = 2 \cdot (1)^2 + 5 \cdot (1) - 3 = 2 + 5 - 3 = +4 \text{ NON È RADICE}$$

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{2} - 3 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 3 = \frac{1-5-6}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \text{ NON È RADICE} \end{aligned}$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

$$P\left(+\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2} - 3 = \\ = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{1+5-6}{2} = 0 \quad \text{È RADICE}$$

COSÌ IL NUOVO BINOMIO DI 1° GRADO SARÀ

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

E LA NUOVA DIVISIONE DA SVOLGERE CON RUFFINI SARÀ:

$$(2x^2 + 5x - 3) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

I POLINOMI SONO COMPLETI ED ORDINATI, ALLORA:

	+2	+5	-3
$+\frac{1}{2}$		+1	+3
	+2	+6	0

COSÌ

$$(2x^2 + 5x - 3) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 6)$$

E RITORNANDO ANCORA AL POLINOMIO DI PARTENZA AVREMO:

$$P(x) = (x+1)(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x+6)$$

E VOLENDOLO SCRIVERE CON RADICI INTERE, BASTA MOLTIPLICARE TUTTO PER $\frac{2}{2}$ CHE SAPPIAMO ESSERE UGUALE AD 1 CHE È L'ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO, CIOÈ:

$$P(x) \cdot \frac{2}{2} = P(x)$$

MA:

$$(x+1)(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x+6) \cdot \frac{2}{2}$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

OTTENENDO CHE

$$P(x) = (x+1)(x-1)(2x-1)(x+3)$$

IN CONCLUSIONE, IL POLINOMIO DI PARTENZA

$$2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

LO POSSIAMO SCRIVERE SCOMPOSTO COME

$$(x+1)(x-1)(2x-1)(x+3)$$

E CIÒ È

$$(2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3) = (x+1)(x-1)(2x-1)(x+3)$$

OSSERVAZIONE:

LA RICERCA DEGLI ZERI DEL POLINOMIO È LA PARTE PIÙ LABORIOSA DELLA REGOLA DI RUFFINI PERCHÉ IL POLINOMIO POTREBBE NON AVERE RADICI E QUINDI NON ESSERE SCOMPONIBILE, COME NEL CASO DELLA SOMMA DI QUADRATI, AD ESEMPIO

$$x^2 + 4$$

OPPURE POTREBBE AVERE RADICI NON RAZIONALI COME AD ESEMPIO

$$x^2 - 2$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

ESEMPIO 2

SCOMPORRE IL SEGUENTE POLINOMIO MEDIANTE LA REGOLA DI RUFFINI:

$$X^3 - 5X^2 - 4X + 20$$

DIVISORI TERMINE NOTO
 $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20$

$$P(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 20 = -1 - 5 + 4 + 20 = +18 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(1) = (1)^3 - 5(1)^2 - 4(1) + 20 = 1 - 5 - 4 + 20 = +12 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 20 = -8 - 20 + 8 + 20 = 0 \quad \text{È RADICE}$$

QUINDI SVOLGIAMO

$$(X^3 - 5X^2 - 4X + 20) : (X + 2)$$

	1	-5	-4	+20
-2		-2	+14	-20
	1	-7	+10	0

ALLORA $(X^3 - 5X^2 - 4X + 20) = (X + 2)(X^2 - 7X + 10)$

SCOMPONIAMO ADESSO

$$X^2 - 7X + 10$$

DIVISORI TERMINE NOTO
 $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$

$$P(-1) = (-1)^2 - 7(-1) + 10 = 1 + 7 + 10 = 18 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(1) = (1)^2 - 7(1) + 10 = 1 - 7 + 10 = +4$$

$$P(-2) = (-2)^2 - 7(-2) + 10 = 4 + 14 + 10 = 28$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI CON RUFFINI

$$P(2) = (2)^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0 \quad \text{È RADICE}$$

QUINDI SVOLGIAMO

$$(x^2 - 7x + 10) : (x - 2)$$

	1	-7	+10
+2		+2	-10
	1	-5	0

ALLORA

$$(x^2 - 7x + 10) = (x - 2)(x - 5)$$

QUINDI IN CONCLUSIONE IL POLINOMIO DI PARTENZA
LO POSSIAMO SCOMPORRE COME:

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = (x + 2)(x - 2)(x - 5)$$