

SISTEMI 2° GRADO - PROBLEMI

COME ABBIAMO VISTO NELLA LEZIONE SUI SISTEMI LINEARI, IL GRADO DI UN SISTEMA SI OTTIENE MOLTIPLICANDO I GRADI DELLE SINGOLE EQUAZIONI CHE LO COMpongONO.

DI CONSEGUENZA UN SISTEMA È DI 2° GRADO SOLO SE È COMPOSTO DA 1 EQUAZIONE DI 2° GRADO ED 1 (O PIÙ NEL CASO DELLO SPAZIO) EQUAZIONI DI 1° GRADO. ANCHE PER QUESTI SISTEMI VALGONO I PRINCIPI DI EQUIVALENZA CHE SI POSSONO APPLICARE AI SISTEMI DI 1° GRADO, COME

- PRINCIPIO DI RIDUZIONE:

IN UN SISTEMA DI EQUAZIONI, SOSTITUENDO AD UNA DI QUESTE L'EQUAZIONE CHE SI OTTIENE SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO TUTTE LE EQUAZIONI, SI OTTIENE UN SISTEMA EQUIVALENTE.

- PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE:

RISOLVENDO UNA EQUAZIONE RISPETTO AD UNA INCOGNITA E SOSTITUENDO LA SUA ESPRESSIONE NELLE ALTRE EQUAZIONI SI OTTIENE UN SISTEMA EQUIVALENTE.

SOLITAMENTE LA STRATEGIA PIÙ COMODA PER RISOLVERE QUESTO TIPO DI SISTEMI È QUELLA DI UTILIZZARE IL METODO DI SOSTITUZIONE:

- 1) SI ESPRIME UNA DELLE 2 INCOGNITE IN FUNZIONE DELL'ALTRA NELL'EQUAZIONE LINEARE.
- 2) SI SOSTITUISCE L'ESPRESSIONE OTTENUTA NELLA EQUAZIONE DI 2° GRADO DETTA RISOLVENTE CHE

GENERALMENTE SARÀ UNA EQUAZIONE IN UNA INCOGNITA DI 2° GRADO.

3.1) SE LA RISOLVENTE È UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO:

a) $\Delta > 0$

SI SOSTITUISCONO LE 2 DISTINTE SOLUZIONI DELLA RISOLVENTE NELLA ESPRESSIONE DELLA EQUAZIONE LINEARE OTTENENDO 2 COPPIE DISTINTE DI VALORI CHE RAPPRESENTANO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA.

b) $\Delta = 0$

SI SOSTITUISCE LA SOLUZIONE (2 COINCIDENTI) DELLA RISOLVENTE NELLA ESPRESSIONE DELLA EQUAZIONE LINEARE OTTENENDO 1 COPPIA DI VALORI CHE RAPPRESENTA LE 2 SOLUZIONI COINCIDENTI DEL SISTEMA.

c) $\Delta < 0$

IL SISTEMA NON AMMETTE SOLUZIONI.

3.2) SE LA RISOLVENTE È UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO:

a) SE LA RISOLVENTE DIVENTA UNA IDENTITÀ ALLORA IL SISTEMA È INDETERMINATO.

b) SE LA RISOLVENTE DIVENTA UNA UGUAGLIANZA FALSA IL SISTEMA È IMPOSSIBILE.

c) SE LA RISOLVENTE AMMETTE UNA SOLUZIONE IL SISTEMA AMMETTE 1 COPPIA DI VALORI COME SOLUZIONE (NON DOPPIA!)

VEDIAMO UN ESEMPIO:

$$\begin{cases} x^2 - x = y \\ y - x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = y \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = x + 3 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \begin{matrix} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{matrix}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{+2 \pm 4}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{+2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1 = x_1 \\ \frac{+2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 = x_2 \end{cases}$$

Così:

$$y_1 = x_1 + 3 = -1 + 3 = +2 \Rightarrow (-1, +2) \quad \text{2 COPPIE}$$

$$y_2 = x_2 + 3 = 3 + 3 = +6 \Rightarrow (+3, +6) \quad \text{DISTINTE}$$

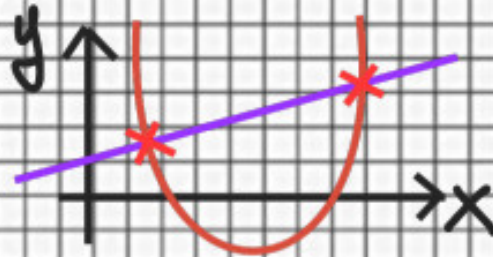
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA NEL PIANO
 PER COME È COSTITUITO UN SISTEMA DI 2° GRADO, CIOÈ UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO ED UNA (O PIÙ) EQUAZIONI LINEARI DI PRIMO GRADO, NEL CASO IN CUI CI TROVIAMO NEL PIANO CARTESIANO, CIOÈ 2 EQUAZIONI E 2 INCOGNITE, LA SUA RISOLUZIONE CI DÀ INFORMAZIONI RIGUARDO LA POSIZIONE RECIPROCA TRA UNA RETTA (EQUAZIONE LINEARE DI 1° GRADO) ED UNA CONICA (EQUAZIONE DI 2° GRADO) COME LA PARABOLA, LA CIRCONFERENZA,

L'ELLISSE O L'IPERBOLE -

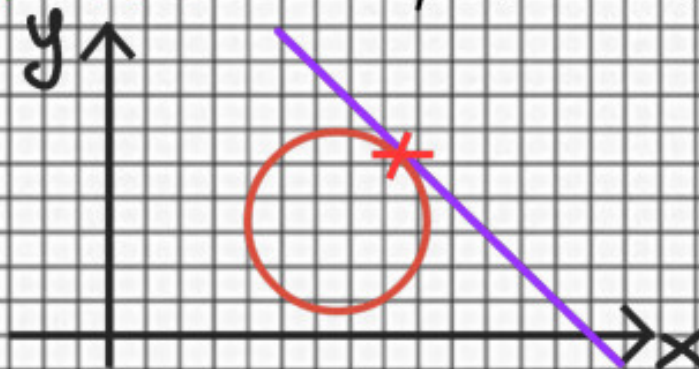
IN BASE AL NUMERO DI SOLUZIONI O AL SEGNO DEL Δ DELLA RISOLVENTE SI POSSONO VERIFICARE LE SEGUENTI SITUAZIONI:

- 1) IL SISTEMA AMMETTE 2 SOLUZIONI DISTINTE ($\Delta > 0$) ALLORA LA RETTA È SECANTE ALLA CONICA.

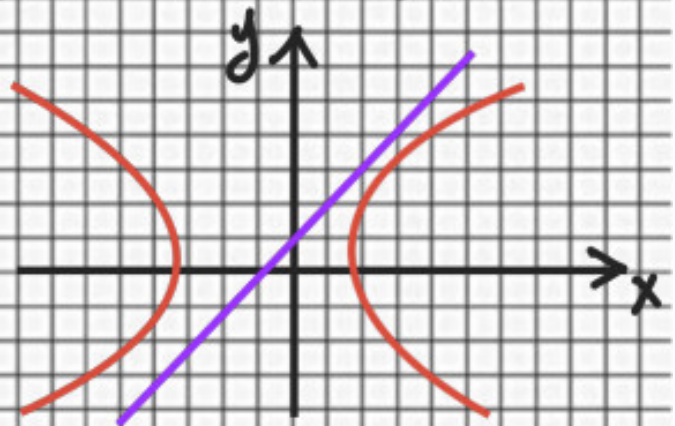
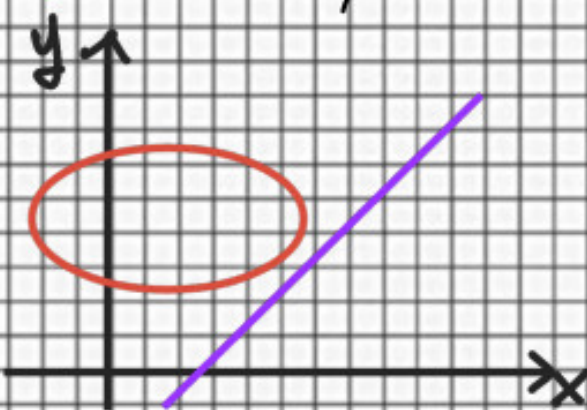
CONSIDERANDO AD ESEMPIO RETTA E PARABOLA:



- 2) IL SISTEMA AMMETTE 1 SOLUZIONE ($\Delta = 0$) RETTA TANGENTE ALLA CONICA, ES. RETTA-CIRCONFERENZA:



- 3) IL SISTEMA È IMPOSSIBILE ($\Delta < 0$) RETTA ESTERNA ALLA CONICA, ES. RETTA-ELLISSE E RETTA-IPERBOLE:



ESERCIZI

$$1 \quad \begin{cases} y - x = 3 \\ 9 + (y + x)^2 = 2(xy + 13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 9 + (x + 3 + x)^2 = 2[x(x + 3) + 13] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 9 + (2x + 3)^2 = 2(x^2 + 3x + 13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 9 + 4x^2 + 12x + 9 = 2x^2 + 6x + 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 4x^2 - 2x^2 + 12x - 6x + 9 + 9 - 26 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x^2 + 6x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad a = 1 \quad b = 3 \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 = x_1 \\ \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 = x_2 \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + 3 = -4 + 3 = -1 \Rightarrow (-4, -1)$$

$$y_2 = x_2 + 3 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow (1, 4)$$

2 COPPIE

DISTINTE

$$2 \quad \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 2(3-y)-y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 6-2y-y^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y \\ y^2+2y-6+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-y \\ y^2+2y-3=0 \end{cases}$$

$$y^2+2y-3=0 \quad a=1 \quad b=2 \quad c=-3$$

$$\Delta=(2)^2-4(1)(-3)=4+12=16$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 = y_1 \\ \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 = y_2 \end{cases}$$

$$x_1 = 3 - y_1 = 3 - (-3) = 6 \Rightarrow (6, -3) \quad \text{2 COPPIE}$$

$$x_2 = 3 - y_2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow (2, 1) \quad \text{DISTINTE}$$

$$3 \quad \begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-y)^2+2y^2=3 \\ x=2-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+y^2-4y+2y^2-3=0 \\ x=2-y \end{cases}$$

$$3y^2-4y+1=0 \quad a=3 \quad b=-4 \quad c=1$$

$$\Delta=(-4)^2-4(3)(1)=16-12=4$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(3)} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = y_1 \\ \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - y_1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ x_2 &= 2 - y_2 = 2 - 1 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right) \vee (1, 1)$$

$$4 \quad \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 36 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x(2x-2) + (2x-2)^2 = 36 \\ y = 2x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - \cancel{4x^2} + 4x + \cancel{4x^2} + 4 - 8x - 36 = 0 \\ y = 2x-2 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 32 = 0 \quad a=1 \quad b=-4 \quad c=-32$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-32) = 16 + 128 = 144$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{144}}{2(1)} = \frac{4 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{4-12}{2} = \frac{-8}{2} = -4 = x_1 \\ \frac{4+12}{2} = \frac{16}{2} = 8 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 2 = 2(-4) - 2 = -10 \\ y_2 &= 2x_2 - 2 = 2(8) - 2 = 14 \end{aligned} \Rightarrow (-4, -10) \vee (8, 14)$$

$$5 \quad \begin{cases} 3(x-1) - 2y = 0 \\ 4y^2 + 9x^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 - 2y = 0 \\ 4y^2 + 9x^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2y + 3 \\ 4y^2 + 9x^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y+3}{3} \\ 4y^2 + 9x^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y+3}{3} \\ 4y^2 + 9\left(\frac{2y+3}{3}\right)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y+3}{3} \\ 4y^2 + \cancel{9}\left(\frac{4y^2 + 9 + 12y}{\cancel{9}}\right) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y+3}{3} \\ 8y^2 + 12y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 + 3y + 1 = 0 \quad a=2 \quad b=3 \quad c=1$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$Y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{-3-1}{4} = -\frac{4}{4} = -1 = Y_1 \\ \frac{-3+1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = Y_2 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{2Y_1 + 3}{3} = \frac{2(-1) + 3}{3} = +\frac{1}{3} \quad \left(\frac{1}{3} \mid -1\right)$$

$$X_2 = \frac{2Y_2 + 3}{3} = \frac{2(-\frac{1}{2}) + 3}{3} = +\frac{2}{3} \quad \left(\frac{2}{3} \mid -\frac{1}{2}\right)$$

$$6 \quad \begin{cases} \frac{1}{4}X^2 + 2X - 2Y^2 + 2Y = 1 \\ 4X - 3Y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^2 + 8X - 8Y^2 + 8Y = 4 \\ 3Y = 4X + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 + 8X - 8Y^2 + 8Y = 4 \\ Y = \frac{4}{3}X + \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X^2 + 8X - 8\left[\frac{4}{3}(X+1)\right]^2 + 8 \cdot \frac{4}{3}(X+1) = 4 \\ Y = \frac{4}{3}(X+1) \end{cases}$$

$$X^2 + 8X - \frac{128}{9}(X^2 + 2X + 1) + \frac{32}{3}(X+1) = 4$$

$$9X^2 + 72X - 128(X^2 + 2X + 1) + 96(X+1) = 36$$

$$9X^2 + 72X - 128X^2 - 256X - 128 + 96X + 96 - 36 = 0$$

$$-119X^2 - 88X - 68 = 0$$

$$119X^2 + 88X + 68 = 0 \quad a=119 \quad b=88 \quad c=68$$

$$\Delta = (88)^2 - 4 \cdot 119 \cdot 68 = -24624$$

$\Delta < 0$ NESSUNA SOLUZIONE

$$7 \quad \begin{cases} X^2 + 2Y^2 - 3XY - X + 2Y - 4 = 0 \\ 2X - 3Y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 + 2Y^2 - 3XY - X + 2Y - 4 = 0 \\ X = \frac{3Y-4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{3Y-4}{2}\right)^2 + 2Y^2 - 3\left(\frac{3Y-4}{2}\right)Y - \left(\frac{3Y-4}{2}\right) + 2Y - 4 = 0 \\ X = \frac{3Y-4}{2} \end{cases}$$

$$\frac{9}{4}y^2 - 6y + 4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y^2 + 6y - \frac{3}{2}y + 2 + 2y - 4 = 0$$

$$\left(\frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{2}\right)y^2 + \left(-\frac{3}{2} + 2\right)y + 2 = 0$$

$$-\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + 2 = 0$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \quad a=1 \quad b=-2 \quad c=-8$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2-6}{2} = -\frac{4}{2} = -2 = y_1 \\ \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 = y_2 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{3y_1 - 4}{2} = \frac{3(-2) - 4}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$X_2 = \frac{3y_2 - 4}{2} = \frac{3(4) - 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\begin{pmatrix} -5, -2 \\ 4, 4 \end{pmatrix}$$

8

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{x-1} = 2 \\ 4(x-y)^2 = 22+x \end{cases}$$

C.E.

$x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y = 2(x-1) \\ 4(x^2 - 2xy + y^2) = 22+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y = 2x-2 \\ 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 22+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-2}{2} \\ 4x^2 + 4y^2 - 8xy - x - 22 = 0 \end{cases}$$

$$4x^2 - 8x\left(\frac{x-2}{2}\right) + 4\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = 22+x$$

$$4x^2 - 4x(x-2) + (x-2)^2 - x - 22 = 0$$

$$4x^2 - 4x^2 + 8x + x^2 - 4x + 4 - x - 22 = 0$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$a=1 \quad b=3 \quad c=-18$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 9 + 72 = 81$$

$$X_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{-3-9}{2} = \frac{-12}{2} = -6 = X_1 \\ \frac{-3+9}{2} = \frac{6}{2} = 3 = X_2 \end{cases}$$

$$Y_1 = \frac{X_1 - 2}{2} = \frac{-6 - 2}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$Y_2 = \frac{X_2 - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$(-6, -4)$$

$$(3, \frac{1}{2})$$

g $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ \frac{3}{x-1} = \frac{1+2y-4}{1-y} \end{cases}$

C.E.

$$x-1 \neq 0 \quad x \neq 1$$

$$1-y \neq 0 \quad y \neq 1$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(1-y) = (2y-3)(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 3y = 2xy - 2y - 3x + 3 \end{cases}$$

$$3 - 3(3x-2) = 2x(3x-2) - 2(3x-2) - 3x + 3$$

$$3 - 9x + 6 = 6x^2 - 4x - 6x + 4 - 3x + 3$$

$$6x^2 - 4x - 6x - 3x + 9x + 4 + 3 - 6 - 3$$

$$6x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$a=3 \quad b=-2 \quad c=-1$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$$

$$X_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{+2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{+2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} = X_1 \\ \frac{+2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 = X_2 \end{cases}$$

$$Y_1 = 3X_1 - 2 = 3(-\frac{1}{3}) - 2 = -1 - 2 = -3 \Rightarrow (-\frac{1}{3}, -3)$$

$X_2 = 1$ NON ACCETTABILE PER LE C.E.

10

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{x+y}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} \end{cases}$$

C.E.

$$x+y \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -y \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{3}{2} - \frac{x+y}{2} \\ \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{3-x-y}{2} \\ y+x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = (3-x-y)(x+y) \\ y = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 3x - x^2 - xy + 3y - xy - y^2 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

$$-x^2 + 3x - 2x(-x+1) + 3(-x+1) - (-x+1)^2 - 2 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 2x - 1 - 2 = 0$$

$$0=0$$

SISTEMA INDETERMINATO

11

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{xy} \\ \frac{x}{y^2+y+4} = \frac{2}{x+1} \end{cases}$$

$$C.E. \quad x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$y^2+y+4 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \star$$

★ PERCHÉ

$$y^2+y+4=0 \text{ MAI, INQUANTO } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 1 - 16 = -15$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{xy} = \frac{2}{xy} \\ x(x+1) = 2(y^2+y+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x^2+x=2y^2+2y+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2 \\ (y+2)^2+(y+2)=2y^2+2y+8 \end{cases}$$

$$y^2 + 4y + 4 + y + 2 = 2y^2 + 2y + 8$$

$$2y^2 - y^2 + 2y - 4y - y + 8 - 4 - 2 = 0$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \quad a=1 \quad b=-3 \quad c=2$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{+3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 = y_1 \\ \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 = y_2 \end{cases}$$

$$x_1 = y_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$x_2 = y_2 + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} (3, 1) \\ (4, 2) \end{cases}$$

12 $\begin{cases} \frac{x^2 - x}{y} = 4 - x \\ \frac{x + 2y}{x - y} = 4 \end{cases}$

C.E.

$$x - y \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} y \neq 0 \\ x \neq y \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2 - x = (4 - x)y \\ x + 2y = 4(x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 4y - xy \\ x + 2y = 4x - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 4y + xy = 0 \\ 2y + 4y = 4x - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4y + xy = 0 \\ 6y = 3x \end{cases}$$

$$x = 2y$$

$$((2y)^2 - (2y) - 4y + (2y)y = 0$$

$$4y^2 - 2y - 4y + 2y^2 = 0 \Rightarrow 6y^2 - 6y = 0 \Rightarrow y(y - 1) = 0$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 1$$

$y_1 = 0$ NON ACCETTABILE PER LE C.E.

$$x_2 = 2 \cdot y_2 = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow (2, 1)$$

13

$$\begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{xy} = -\frac{8}{3} \\ \frac{x+y}{x-2y} = 0,4 \end{cases}$$

C.E.

$$\begin{aligned} xy &\neq 0 & x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ x-2y &\neq 0 & x \neq 2y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3(x^2 - y^2) = -8xy \\ \frac{x+y}{x-2y} = \frac{4}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 8xy = 0 \\ 10(x+y) = 4(x-2y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 8xy = 0 \\ 10x + 10y = 4x - 8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 8xy = 0 \\ 10x - 4x = -10y - 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 8xy = 0 \\ 6x = -18y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 + 8xy = 0 \\ x = -\frac{18}{6}y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3(-3y)^2 - 3y^2 + 8(-3y)y &= 0 \\ 27y^2 - 3y^2 - 24y^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$0 = 0$$

SISTEMA INDETERMINATO

14

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+2y} = \frac{9}{x^2 + 3xy + 2y^2} \\ (x-2)^2 - (y-1)^2 = (x+y)(x-y) - 3 \end{cases}$$

C.E.

$$\begin{aligned} x+y &\neq 0 \Rightarrow x \neq -y \\ x+2y &\neq 0 \Rightarrow x \neq -2y \\ x &\neq 0 \vee y \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y)(x+2y) &= \\ = x^2 + 2xy + xy + 2y^2 &= \\ = x^2 + 3xy + 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x(x+2y) + y(x+y)}{x^2 + 3xy + 2y^2} = \frac{9}{x^2 + 3xy + 2y^2} \\ x^2 - 4x + 4 - y^2 + 2y - 1 = x^2 - y^2 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + xy + y^2 = 9 \\ -4x + 4 + 2y - 1 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - 9 = 0 \\ 4x = 2y + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - 9 = 0 \\ x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\right)y + y^2 - 9 = 0$$

$$\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{2}y + y^2 - 9 = 0$$

$$y^2 + 6y + 9 + 6y^2 + 18y + 4y^2 - 36 = 0$$

$$11y^2 + 24y - 27 = 0 \quad a=11 \quad b=24 \quad c=-27$$

$$\Delta = (24)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-27) = 576 + 1188 = 1764$$

$$y_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{1764}}{2 \cdot 11} = \frac{-24 \pm 42}{22} = \begin{cases} \frac{-24-42}{22} = -\frac{66}{22} = -3 = y_1 \\ \frac{-24+42}{22} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11} = y_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{11}\right) + \frac{3}{2} = \frac{9}{22} + \frac{3}{2} = \frac{9+33}{22} = \frac{42}{22} = \frac{21}{11}$$

$$\Rightarrow (0, -3) \text{ e } \left(\frac{21}{11}, \frac{9}{11}\right)$$

PROBLEMI DI 2° GRADO

VEDIAMO L'APPLICAZIONE DEI SISTEMI DI 2° GRADO PER LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI.

- 1 LA DIFFERENZA TRA DUE NUMERI È $\frac{11}{4}$ MENTRE IL LORO PRODOTTO È $\frac{21}{8}$. TROVA I DUE NUMERI.

$x \rightarrow 1^\circ$ NUMERO

$y \rightarrow 2^\circ$ NUMERO

$$\begin{cases} x - y = \frac{11}{4} & \text{DIFFERENZA} \\ x \cdot y = \frac{21}{8} & \text{PRODOTO} \end{cases} \rightarrow \text{SISTEMA DI 2°}$$

$$\begin{cases} y = x - \frac{11}{4} \\ x(x - \frac{11}{4}) = \frac{21}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - \frac{11}{4} \\ x^2 - \frac{11}{4}x - \frac{21}{8} = 0 \end{cases}$$

$$8x^2 - 22x - 21 = 0 \quad a=8 \quad b=-22 \quad c=-21$$

$$\Delta = (-22)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-21) = 484 + 672 = 1156$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-22) \pm \sqrt{1156}}{2 \cdot 8} = \frac{22 \pm 34}{16} = \begin{cases} \frac{22-34}{16} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4} \\ \frac{22+34}{16} = \frac{56}{16} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 - \frac{11}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$$

$$y_2 = x_2 - \frac{11}{4} = \frac{7}{2} - \frac{11}{4} = \frac{3}{4}$$

I NUMERI RICHIESTI SONO $(-\frac{3}{4}, -\frac{7}{2})$ E $(\frac{7}{2}, \frac{3}{4})$

- 2 TROVARE DUE NUMERI CONSECUTIVI SAPENDO CHE LA SOMMA DEI LORO QUADRATI DIMINUITA DEL LORO PRODOTTO È PARI A 43.

$x \rightarrow 1^\circ$ NUMERO

$y \rightarrow 2^\circ$ NUMERO

$x \rightarrow 1^\circ \text{ NUMERO}$

$y \rightarrow 2^\circ \text{ NUMERO}$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 - xy = 43 \end{cases}$$

$$x^2 + (x+1)^2 - x(x+1) = 43$$

$$x^2 + \cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} - x - 43 = 0$$

$$x^2 + x - 42 = 0 \quad a=1 \quad b=1 \quad c=-42$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} = \begin{cases} \frac{-1-13}{2} = \frac{-14}{2} = -7 = x_1 \\ \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6 = x_2 \end{cases}$$

$$y_1 = x_1 + 1 = -7 + 1 = -6$$

$$y_2 = x_2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

1 NUMERI SONO

$(-7, -6)$ e $(6, 7)$

3

TROVARE DUE NUMERI POSITIVI SAPENDO CHE LA METÀ DEL PRIMO SUPERA DI UNO IL SECONDO E CHE IL QUADRATO DEL SECONDO SUPERA DI UNO LA SESTA PARTE DEL QUADRATO DEL PRIMO.

$x \rightarrow 1^\circ \text{ NUMERO}$

$y \rightarrow 2^\circ \text{ NUMERO}$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = y + 1 \\ y^2 = \frac{x^2}{6} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ y^2 = \frac{x^2}{6} + 1 \end{cases}$$

$$6y^2 = (2y+2)^2 + 6 \Rightarrow 6y^2 = 4y^2 + 8y + 4 + 6 \Rightarrow 2y^2 - 8y - 10 = 0$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \quad a=1 \quad b=-4 \quad c=-5$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-5) = 16 + 20 = 36$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 = y_1 \\ \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 = y_2 \end{cases}$$

$y_1 = -1$ NON ACCETTABILE PERCHÉ NEGATIVO

$$x_2 = 2y_2 + 2 = 2(5) + 2 = 12 \Rightarrow 1 \text{ NUMERI SONO } (12, 5)$$

- 4 OGGI LA DIFFERENZA DELLE ETÀ TRA UN PADRE E SUA FIGLIA È 26 ANNI, MENTRE DUE ANNI FA IL PRODOTTO DELLE LORO ETÀ ERA 56. DETERMINARE L'ETÀ DI ENTRAMBI.

$x \rightarrow$ ETÀ PADRE $y \rightarrow$ ETÀ FIGLIA

$$\begin{cases} x - y = 26 \\ (x-2)(y-2) = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 26 \\ xy - 2x - 2y + 4 = 56 \end{cases}$$

$$x(x-26) - 2x - 2(x-26) - 52 = 0$$

$$x^2 - 26x - 2x - 2x + 52 - 52 = 0$$

$$x^2 - 30x = 0$$

$$x(x-30) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 30 \end{cases}$$

$x_1 = 0$ NON ACCETTABILE

$$y_2 = x_2 - 26 = 30 - 26 = 4$$

LE ETÀ SONO
(30, 4)

- 5 LA DIFFERENZA TRA UN NUMERO DI DUE CIFRE E QUELLO CHE SI OTTIENE SCAMBIANDO LE CIFRE È UGUALE A 36. LA DIFFERENZA TRA IL PRODOTTO DELLE CIFRE E LA LORO SOMMA È UGUALE A 11. TROVARE IL NUMERO.

$x \rightarrow$ 1a CIFRA $y \rightarrow$ 2a CIFRA

$$\begin{cases} 9(x-y) = 36 \\ xy - (x+y) = 11 \end{cases}$$

PERCHÉ IL VALORE ASSOLUTO DELLA DIFFERENZA TRA UN NUMERO A 2 CIFRE E LO STESSO NUMERO A CIFRE INVERTITE È SEMPRE UN MULTIPLO DI 9

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ xy - x - y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ (y+4)y - (y+4) - y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ (y+4)y - (y+4) - y - 11 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 + 4y - y - 4 - y - 11 = 0$$

$$y^2 + 2y - 15 = 0 \quad a=1 \quad b=2 \quad c=-15$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-15) = 4 + 60 = 64$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-2-8}{2} = -\frac{10}{2} = -5 & \text{NO} \\ \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 & \text{SI} \end{cases}$$

$$X_1 = y_1 + 4 = -5 + 4 = -1 \quad \text{NO}$$

$$X_2 = y_2 + 4 = 3 + 4 = 7 \quad \text{SI}$$

IL NUMERO È
73

6 IL PADRE AVEVA 30 ANNI QUANDO È NATA LA FIGLIA. MOLTIPLICANDO LE LORO ETÀ ATTUALI SI TROVA UN PRODOTTO UGUALE A TRE VOLTE IL QUADRATO DELL'ETÀ DELLA FIGLIA. TROVARE LE ETÀ.

$X \rightarrow$ ETÀ PADRE $y \rightarrow$ ETÀ FIGLIA

$$\begin{cases} X - y = 30 \\ xy = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 30 + y \\ (30 + y)y = 3y^2 \end{cases}$$

$$30y + y^2 = 3y^2$$

$$2y^2 - 30y = 0$$

$$y^2 - 15y = 0 \Rightarrow y(y - 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 15 \end{cases}$$

$$X_1 = 30 + y_1 = 30 - 0 = 30$$

$$X_2 = 30 + y_2 = 30 + 15 = 45$$

LE ETÀ SONO
(45, 15)

7 IN UNA PROPORZIONE TRA NUMERI NATURALI I MEDI SONO 5 E 16. IL RAPPORTO TRA IL PRODOTTO DEGLI ESTREMI E LA LORO SOMMA È $\frac{10}{3}$. TROVARE GLI ESTREMI.

$X \rightarrow$ ESTREMO SX $y \rightarrow$ ESTREMO DX
COSÌ $X:5 = 16:y$

E CIOÈ

$$\frac{x}{5} = \frac{16}{y}$$

QUINDI

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{16}{y} \\ \frac{xy}{x+y} = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx = 16 \cdot 5 \\ 3xy = 10(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ 3 \cdot \frac{80}{x} = 10(x + \frac{80}{x}) \end{cases}$$

$$240 = 10 \left(\frac{x^2 + 80}{x} \right)$$

$$\frac{10x^2 + 800}{x} = 240$$

$$10x^2 + 800 = 240x$$

$$10x^2 - 240x + 800 = 0$$

$$x^2 - 24x + 80 = 0 \quad a=1 \quad b=-24 \quad c=80$$

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 80 = 576 - 320 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{24 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{24-16}{2} = \frac{8}{2} = 4 = x_1 \\ \frac{24+16}{2} = \frac{40}{2} = 20 = x_2 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{80}{x_1} = \frac{80}{4} = 20$$

$$y_2 = \frac{80}{x_2} = \frac{80}{20} = 4$$

GLI ESTREMI SONO
(4, 20) OPPURE (20, 4)

- 8 TRATRE ANNI IL PRODOTTO DELL'ETÀ DI DUE RAGAZZI SARÀ
I $\frac{39}{4}$ DELLA SOMMA DELLE ETÀ ATTUALI, MENTRE
DUE ANNI FA L'ETÀ DEL MAGGIORE ERA DOPPIA
DI QUELLA DEL MINORE. TROVARE L'ETÀ DI ENTRAMBI.
X → ETÀ MAGGIORE y → ETÀ MINORE

$$\begin{cases} (x+3)(y+3) = \frac{39}{4}(x+y) \\ (x-2) = 2(y-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (x+3)(y+3) = 39x + 39y \\ x-2 = 2y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4xy + 12x + 12y + 36 - 39x - 39y = 0 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4xy - 27x - 27y + 36 = 0 \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

$$4(2y-2)y - 27(2y-2) - 27y + 36 = 0$$

$$8y^2 - 8y - 54y + 54 - 27y + 36 = 0$$

$$8y^2 - 89y + 90 = 0 \quad a=8 \quad b=-89 \quad c=90$$

$$\Delta = (-89)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 90 = 7921 - 2880 = 5041$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-89) \pm \sqrt{5041}}{2 \cdot 8} = \frac{89 \pm 71}{16} = \begin{cases} \frac{89-71}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} & \text{NO} \\ \frac{89+71}{16} = \frac{160}{16} = 10 \end{cases}$$

$$x = 2y - 2 = 2 \cdot 10 - 2 = 20 - 2 = 18$$

LE ETA DEI RAGAZZI SONO (18, 10)