DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLUBILI CON I LOGARITMI

GRAZIE AI LOGARITMI, ANALOGAMENTE ALLE EQUAZIONI ESPONENZIALI, È POSSIBILE RISOLVERE QUELLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI DIFFICILMENTE RICONDUCIBILI ALLA FORMA CANONICA, NELLE QUALI CIOÈ VI È UNA DISUGUAGLIANZA TRA POTENZE CON BASI DIVERSE, COME AD ESEMPIO:

$$a^{f(x)} \geq b^{g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad a^{f(x)} \leq b^{g(x)}$$

MA NELL'IPOTESI CHE:

$$a^{f(x)} > 0 \quad \text{E} \quad b^{g(x)} > 0$$

RISULTANO DEFINITI, CON $c>0$ E $c \neq 1$:

$$\log_c a^{f(x)} \quad \text{E} \quad \log_c b^{g(x)}$$

E PER LA "MONOTONIA" DELLA FUNZIONE LOGARITMO, RICORDANDO CHE SE $c>1$ LA FUNZIONE È CRESCENTE MENTRE SE $0<c<1$ LA FUNZIONE È DECRESCENTE, È LECITO SCRIVERE CHE SE VALE:

$$a^{f(x)} \geq b^{g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad a^{f(x)} \leq b^{g(x)}$$

ALLORA È EQUIVALENTE SCRIVERE:

$$\log_c a^{f(x)} \geq \log_c b^{g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad \log_c^{f(x)} \leq \log_c^{g(x)}$$

SE $c>1$ (SI MANTIENE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE)

DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

OPPURE È EQUIVALENTE SCRIVERE

$\log_c a^{f(x)} \leq \log_c b^{g(x)}$ OPPURE $\log_c a^{f(x)} \geq \log_c b^{g(x)}$

SE $0<c<1$ (SI INVERTE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE)

ESEMPI

1) $5^x < 20$

$\log_5 5^x < \log_5 20$

$x \log_5 5 < \log_5 20$

$x < \log_5 20$

2) $2^x < 4 \cdot 3^x$

$\ln 2^x < \ln(4 \cdot 3^x)$

$x \ln 2 < \ln 4 + \ln 3^x$

$x \ln 2 < \ln 4 + x \ln 3$

$x \ln 2 - x \ln 3 < \ln 4$

$x(\ln 2 - \ln 3) < \ln 4$

QUESTA QUANTITÀ È SICURAMENTE NEGATIVA ESSENDO IL LOGARITMO NATURALE UNA FUNZIONE CRESCENTE QUINDI MOLTIPLICHIAMO TUTTO PER -1, COSÌ

$x(\ln 3 - \ln 2) > -\ln 4$

$x > \frac{-\ln 4}{\ln 3 - \ln 2} \simeq -3{,}419$

DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

3) $2^x + 5 \cdot 3^x > 2^{x+1}$

PRIMA DI UTILIZZARE I LOGARITMI BISOGNA TRASFORMARE ENTRAMBI I MEMBRI IN PRODOTTI DI POTENZE:

$$2^x + 5 \cdot 3^x > 2^{x+1}$$
$$5 \cdot 3^x > 2^{x+1} - 2^x$$
$$5 \cdot 3^x > 2^x (2 - 1)$$
$$5 \cdot 3^x > 2^x$$

APPLICHIAMO QUINDI I LOGARITMI:

$$\ln(5 \cdot 3^x) > \ln 2^x$$
$$\ln 5 + \ln 3^x > \ln 2^x$$
$$\ln 5 + x \ln 3 > x \ln 2$$
$$x \ln 3 - x \ln 2 > -\ln 5$$
$$x(\ln 3 - \ln 2) > -\ln 5$$
$$x > \frac{-\ln 5}{\ln 3 - \ln 2} \simeq -3,809$$

4) $3^{2x+1} - 3^{2+x} + 6 \leq 0$

$$3 \cdot 3^{2x} - 3^2 \cdot 3^x + 6 \leq 0$$

PONIAMO $3^x = z \Rightarrow 3^{2x} = z^2$ COSÌ

$$3z^2 - 9z + 6 \leq 0$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$3z^2 - 9z + 6 = 0$$

DISEQ. ESP. RISOL. CON LOGARITMI

$\Delta = 81 - (4)(3)(6) = 81 - 72 = 9$

$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm 3}{6} = \begin{cases} \frac{3-3}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{3+3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$

$1 \leq z \leq 2$

CIOÈ

$1 \leq 3^x \leq 2$

DALLA QUALE

$\log_3 1 \leq \log_3 3^x \leq \log_3 2 \Rightarrow \boxed{0 \leq x \leq \log_3 2}$

5) $\frac{2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2}{1 - 3^x} > 0$

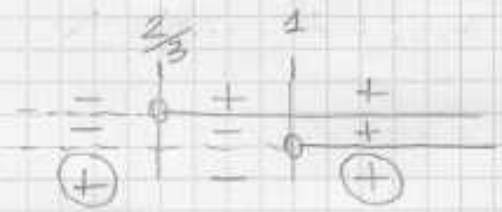
DISEQUAZIONE FRATTA QUINDI STUDIAMO NUMERATORE E DENOMINATORE

N) $2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2 > 0$

$3 \cdot 2^x 2^x - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 2^x \\ z^2 = 2^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow 3z^2 - 5z + 2 > 0$

$\Delta = 1 \qquad z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ CIOÈ $\quad z < \frac{2}{3} \vee z > 1$

$2^x < \frac{2}{3} \vee 2^x > 1$

QUINDI:

$x < \log_2 2 - \log_2 3 \vee x > 0$

D) $1 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 1$

$\Rightarrow x < 0$

IN DEFINITIVA:

$\Rightarrow \boxed{x < 1 - \log_2 3}$