EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

SE UNA EQUAZIONE O DISEQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL 2° NON HA UNA FORMA NOTA, PER RISOLVERLA BISOGNA PROCEDERE MEDIANTE OPERAZIONI ALGEBRICHE SULLA SUA ESPRESSIONE IN MODO DA POTERLA RISCRIVERE COME UNA FATTORIZZAZIONE IN CUI I SINGOLI FATTORI SONO DELLE SCRITTURE ALGEBRICHE IN UNA FORMA NOTA E PIÚ FACILMENTE TRATTABILE COME ESPRESSIONI DI 1° GRADO, DI 2° GRADO, FORME BINOMIE, BIQUADRATICHE O TRINOMIE.
QUINDI AL COSPETTO DI UNA EQUAZIONE O DISEQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL 2° BISOGNA PRIMA VEDERE SE É BINOMIA, BIQUADRATICA O TRINOMIA, ALTRIMENTI VERIFICARE SE SI PUÓ RISCRIVERE MEDIANTE L'UTILIZZO DI PRODOTTI NOTEVOLI O IL RACCOGLIMENTO TOTALE E PARZIALE OPPURE RIDURRE IL SUO GRADO MEDIANTE L'UTILIZZO DELLA DIVISIONE TRA POLINOMI O DELLA REGOLA DI RUFFINI.
PER COMPRENDERE MEGLIO VEDIAMO ALCUNI

ESEMPI EQUAZIONI

1) $x^3-3x^2-3x+9=0$

NON É BIQUADRATICA, NE TRINOMIA O TANTOMENO BINOMIA.
NON SEMBRA ESSERCI ALCUN PRODOTTO NOTEVOLE CHE CI PUÓ AIUTARE.
PROVIAMO A SCOMPORRE IL POLINOMIO MEDIANTE RUFFINI

$P(x)=x^3-3x^2-3x+9$

$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-3(-1)+9=-1+3+3+9=14$ No

$P(1)=(1)^3-3(1)^2-3(1)+9=1-3-3+9=+4$ NO

$P(-3)=(-3)^3-3(-3)^2-3(-3)+9=-27-27+9+9=$ NO

$P(3)=(3)^3-3(3)^2-3(3)+9=\cancel{27}-\cancel{27}-\cancel{9}+\cancel{9}=0$ SI

	1	-3	-3	+9
+3		+3	0	-9
	1	0	-3	0

DIVIDIAMO CON RUFFINI PER IL BINOMIO DIVISORE $(x-3)$

$x^2+0\cdot x-3$ QUOZIENTE

COSÌ

$x^3-3x^2-3x+9=0$ LO RISCRIVO COME DIVISORE X QUOZIENTE

$(x-3)(x^2-3)=0$ IL PRODOTTO SI ANNULLA SE SI ANNULLANO I FATTORI

QUINDI

$x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=+3}$

$x^2-3=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$

2] $(x^2-1)(x^2-9)=0$

IN QUESTO CASO IL PROCEDIMENTO È IMMEDIATO IN QUANTO L'EQUAZIONE SI PRESENTA GIÀ COME PRODOTTO DI DUE FATTORI, QUINDI:

$x^2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$

$x^2-9=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 3}$

3] $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$

IN QUESTO CASO POSSIAMO IMMEDIATAMENTE RACCOGLIERE LA X PRESENTE IN TUTTI I TERMINI, COSÌ:

$x(2x^3-5x^2-18x+45)=0$

E LA PRIMA SOLUZIONE È $\boxed{x=0}$

POI $2x^3-5x^2-18x+45=0$

TROVIAMO UNO ZERO DEL POLINOMIO IN MODO DA POTERLO SCOMPORRE

$P(-1)=2(-1)^3-5(-1)^2-18(-1)+45=$

$=-2-5+18+45=$ NO

$P(1)=2(1)^3-5(1)^2-18(1)+45=$

$=2-5-18+45=$ NO

$P(-5)=2(-5)^3-5(-5)^2-18(-5)+45=$

$=-250-125+90+45=-240$ NO

$P(5)=2(5)^3-5(5)^2-18(5)+45=$

$=250-125-90+45=80$ NO

$P\left(\frac{5}{2}\right)=2\left(\frac{5}{2}\right)^3-5\left(\frac{5}{2}\right)^2-18\left(\frac{5}{2}\right)+45=$

$=\frac{125}{4}-\frac{125}{4}-\frac{90^{45}}{2}+45=-45+45=0$ SI

A QUESTO PUNTO DIVIDIAMO IL POLINOMIO PER $\left(x-\frac{5}{2}\right)$

	2	−5	−18	+45
$+\frac{5}{2}$		+5	0	−45
	2	0	−18	//

QUINDI

$2x^3-5x^2-18x+45=\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(2x^2-18\right)=0$

CIOÈ:

$x-\frac{5}{2}=0 \quad \boxed{x=+\frac{5}{2}}$

$2x^2-18=0 \quad x^2=+\frac{18^9}{2}=+9 \quad \boxed{x=\pm\sqrt{9}=\pm 3}$

4) $x^8-5x^4+4=0$ EQUAZIONE TRINOMIA

$z=x^4$

$z^2-5z+4=0$ $\quad z_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm3}{2}=\begin{cases}\frac{2}{2}=1\\ \frac{8}{2}=4\end{cases}$

$x^4=1$ $\quad x=\pm1$

$x^4=4$ $\quad x=\pm\sqrt[4]{2}$

5) $(x^2-3)^6+13(x^2-3)^3+40=0$

PONIAMO $z=x^2-3$ IN MODO CHE SI OTTIENE

$z^6+13z^3+40=0$ EQ. TRINOMIA

PONIAMO ANCORA $k=z^3$ COSÌ

$k^2+13k+40=0$

$k_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-13\pm3}{2}=\begin{cases}\frac{-13-3}{2}=-\frac{16}{2}=-8\\ \frac{-13+3}{2}=-\frac{10}{2}=-5\end{cases}$

QUINDI $\quad z^3=-8 \quad z=-2$

$z^3=-5 \quad z=-\sqrt[3]{5}$

ED ANCORA

$x^2-3=-2 \quad x^2=+1 \quad x=\pm1$

$x^2-3=-\sqrt[3]{5} \quad x^2=3-\sqrt[3]{5} \quad x=\pm\sqrt{3-\sqrt[3]{5}}$

6) $2(x^2-1)(x^2+3)+7x=7x^3$

$2(x^4+3x^2-x^2-3)+7x-7x^3=0$

$2x^4-7x^3+4x^2+7x-6=0$

$P\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^4-7\left(\frac{3}{2}\right)^3+4\left(\frac{3}{2}\right)^2+7\left(\frac{3}{2}\right)-6=$

$=\frac{81}{8}-\frac{189}{8}+9+\frac{21}{2}-6=$

$= \frac{81-189+72+84-48}{8} = \frac{0}{8} = 0$

DIVIDIAMO QUINDI PER $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ (POTREMMO FARLO SEMPRE CON RUFFINI)

$2x^4-7x^3+4x^2+7x-6 \;\big|\; x-\frac{3}{2}$

$-2x^4+3x^3$

$-4x^3+4x^2+7x-6$

$+4x^3-6x^2$

$-2x^2+7x-6$

$+2x^2-3x$

$+4x-6$

$-4x+6$

$2x^3-4x^2-2x+4$

COSÌ

$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(2x^3-4x^2-2x+4\right)=0$

$\boxed{x=+\frac{3}{2}}$

E

$2x^3-4x^2-2x+4=0$

$x^3-2x^2-x+2=0$

$P(1)=(1)^3-2(1)^2-1+2=1-2-1+2=0$

	1	−2	−1	+2
1		1	−1	−2
	1	−1	−2	//

$(x-1)(x^2-x-2)=0$

$x-1=0 \quad \boxed{x=+1}$

$x^2-x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-2}{2}=-1 & \boxed{x=-1}\\ \frac{4}{2}=2 & \boxed{x=2}\end{cases}$

7) $\frac{x^2-3x}{2x} - \frac{x-2}{x-1} = 0$ CE: $x \neq 0$, $x \neq 1$

$\frac{(x^2-3x)(x-1) - 2x(x-2)}{2x(x-1)} = 0$

$x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + 4x = 0$

$x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

$x(x^2 - 6x + 7) = 0$

$x = 0$ NON ACCETTABILE PER LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

$x^2 - 6x + 7 = 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$

8) $\frac{4}{x^3+1} - \frac{4x^3+3}{x^6-1} = 8$ CE: $x^3+1 \neq 0$ $x \neq -1$, $x^6-1 \neq 0$ $x \neq \pm 1$

$\frac{4}{x^3+1} - \frac{4x^3+3}{(x^3-1)(x^3+1)} - 8 = 0$

$\frac{4(x^3-1) - (4x^3+3) - 8(x^6-1)}{x^6-1} = 0$

$4x^3 - 4 - 4x^3 - 3 - 8x^6 + 8 = 0$

$-8x^6 + 1 = 0$

$8x^6 - 1 = 0$

$x^6 = \frac{1}{8}$

$x = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{2^3}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

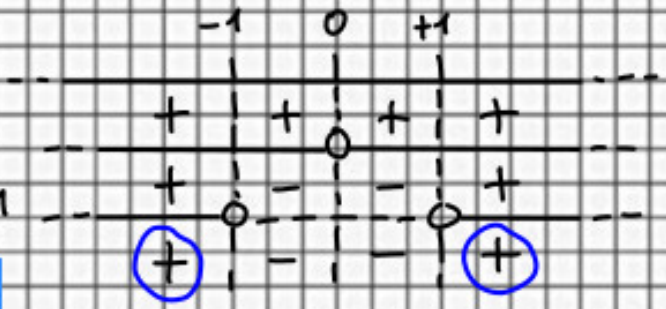
ESEMPI DISEQUAZIONI

1) $x^4 - x^2 > 0$

$x^2(x^2-1) > 0$

$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0$

$x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \cup x > +1$



$x < -1 \cup x > +1$

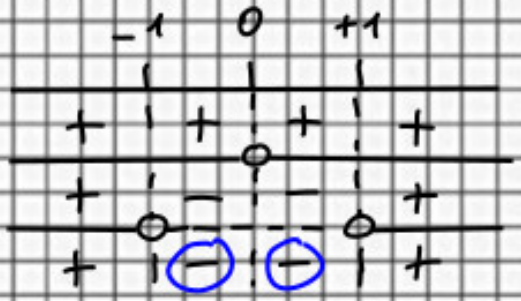
2) $x^2 - x^4 > 0$

$x^4 - x^2 < 0$

$x^2(x^2-1) < 0$

$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0$

$x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \cup x > +1$



$-1 < x < 0 \cup 0 < x < +1$

3) $x^3 - 5x^2 + 6x < 0$

$x(x^2 - 5x + 6) < 0$

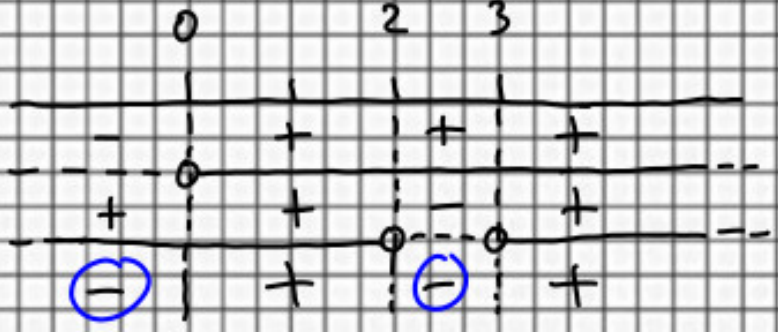
$x > 0$

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$x < 2 \cup x > 3$



$x < 0 \cup +2 < x < +3$

4 $x^3-2x^2-x+2\leq 0$

$P(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-(-1)+2=-1-2+1+2=0$

	1	−2	−1	+2
−1		−1	+3	−2
	1	−3	+2	0

$(x+1)(x^2-3x+2)\leq 0$

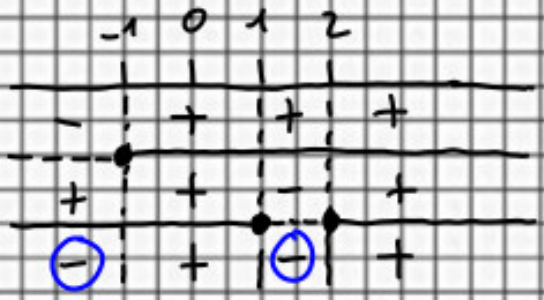
$x+1\geq 0 \quad x\geq -1$

$x^2-3x+2\geq 0$

$x^2-3x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

$x\leq 1 \cup x\geq 2$



$x\leq -1 \cup +1\leq x\leq +2$

5 $x^5-2x^4+x^3-2x^2-2x+4\leq 0$

$P(-1)=(-1)^5-2(-1)^4+(-1)^3-2(-1)^2-2(-1)+4=0$ SI

$=-1-2-1-2+2+4=0$

	1	−2	+1	−2	−2	+4
−1		−1	+3	−4	+6	−4
	1	−3	+4	−6	+4	0

$(x+1)(x^4-3x^3+4x^2-6x+4)\leq 0$

$P(-1)=(-1)^4-3(-1)^3+4(-1)^2-6(-1)+4=$

$=+1+3+4+6+4\neq 0$ NO

$P(1)=(1)^4-3(1)^3+4(1)^2-6(1)+4=$

$=1-3+4-6+4=0$ SI

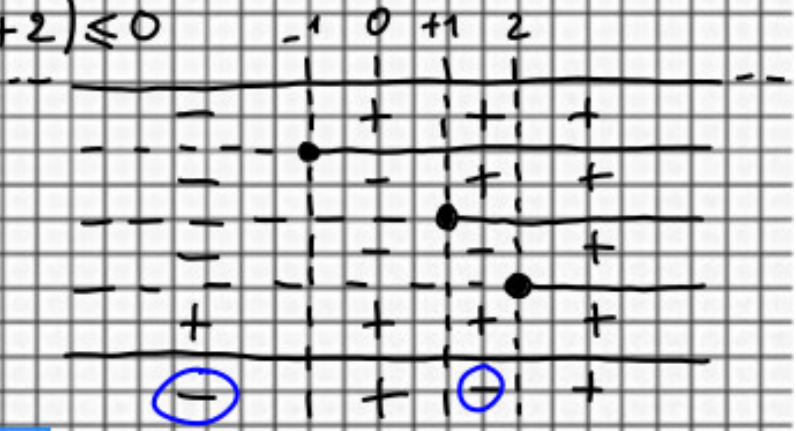
	+1	−3	+4	−6	+4
+1		+1	−2	+2	−4
	+1	−2	+2	−4	0

$(x+1)(x-1)(x^3-2x^2+2x-4)\leq 0$

$P(2)=(2)^3-2(2)^2+2(2)-4=8-8+4-4=0$ SI

	+1	−2	+2	−4
+2		+2	0	+4
	+1	0	+2	0

$(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2)\leq 0$



$x+1\geq 0 \quad x\geq -1$

$x-1\geq 0 \quad x\geq +1$

$x-2\geq 0 \quad x\geq 2$

$x^2+2\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x\leq -1 \cup +1\leq x<+2$

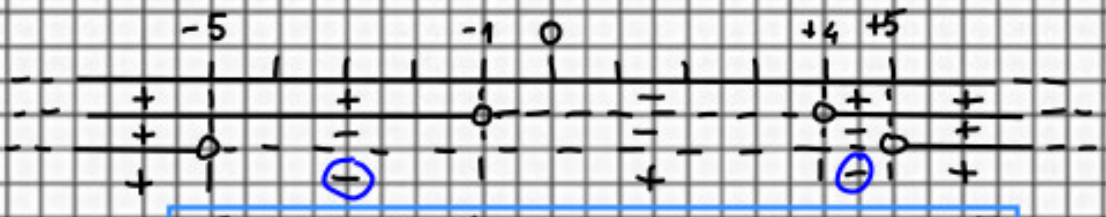
6] $(x^2-3x-4)(x^2-25)<0$

$x^2-3x-4>0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}-1\\+4\end{cases}$ $\quad x<-1 \cup x>+4$

$x^2-25>0$

$x^2=25 \quad x=\pm 5$ $\quad x<-5 \cup x>+5$



$-5<x<-1 \quad \cup \quad +4<x<+5$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

7) $\frac{x^3(x+1)^2}{x+3} \geq 0$

C.E: $x+3 \neq 0 \quad x \neq -3$

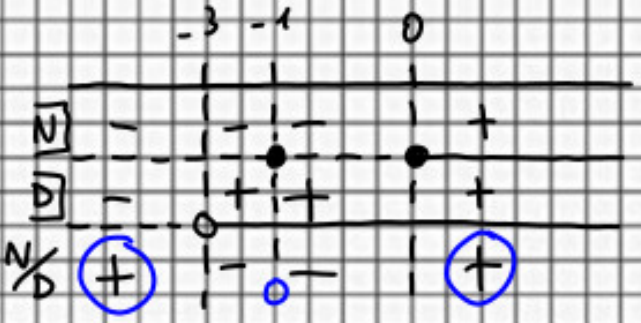
N) $x^3(x+1)^2 \geq 0$

$x^3 \geq 0 \quad x \geq 0$

$(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \cup x = -1$

D) $x+3 > 0$

$x > -3$



$x < -3 \cup x \geq 0 \cup x = -1$

8) $\frac{x^3(x-1)^3}{x+3} \geq 0$

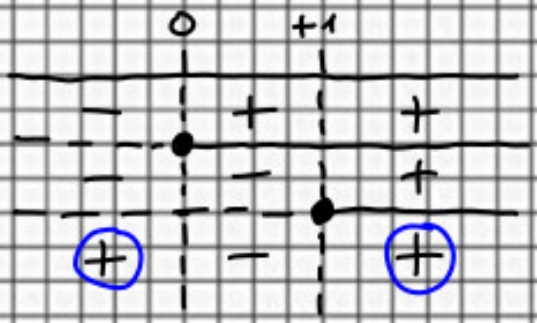
C.E: $x+3 \neq 0 \quad x \neq -3$

N) $x^3(x-1)^3 \geq 0$

$x^3 \geq 0 \quad x \geq 0$

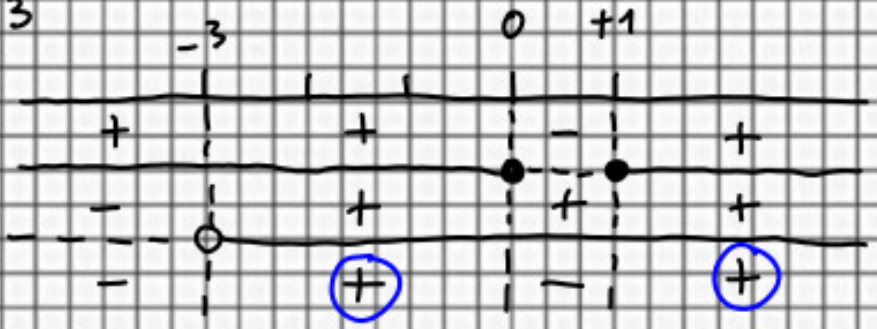
$(x-1)^3 \geq 0 \quad x-1 \geq 0 \quad x \geq +1$

$x \leq 0 \cup x \geq +1$



D) $x+3 > 0$

$x > -3$



$-3 < x \leq 0 \cup x \geq +1$

9) $\frac{1}{x} < \frac{x-1}{x^2+x+1}$

C.E: $x \neq 0$

$\frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x} > 0$

$$\frac{x(x-1)-x^2-x-1}{x(x^2+x+1)}>0$$

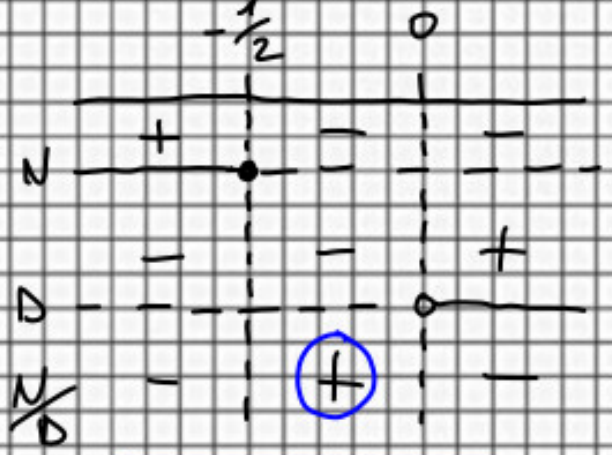
$$\frac{-2x-1}{x(x^2+x+1)}>0$$

N) $-2x-1\geq 0 \quad x\leq -\frac{1}{2}$

D) $x(x^2+x+1)>0$

$x>0$

$x^2+x+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$



$$-\frac{1}{2}<x<0$$

10 $\frac{x+3}{x-2}<\frac{x-2}{x+3}$ CE: $x-2\neq 0$ $x\neq 2$ ∪ $x+3\neq 0$ $x\neq -3$

$$\frac{x+3}{x-2}-\frac{x-2}{x+3}<0$$

$$\frac{(x+3)^2-(x-2)^2}{(x-2)(x+3)}<0$$

$$\frac{x^2+6x+9-x^2+4x-4}{(x-2)(x+3)}<0$$

$$\frac{10x+5}{(x-2)(x+3)}<0$$

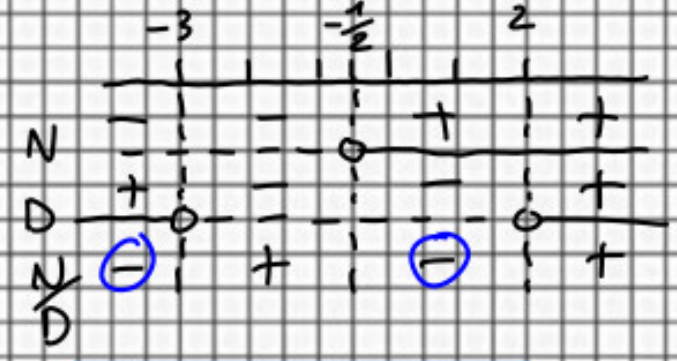
N) $10x+5>0 \quad x>-\frac{1}{2}$

D) $(x-2)(x+3)>0$

$x-2>0 \quad x>2$

$x+3>0 \quad x>-3$

$x<-3 \cup x>2$



$$x<-3 \cup -\frac{1}{2}<x<2$$

11 $x^3(x^2-1)-2x(x^2+14)<0$

$x^5-x^3-2x^3-28x<0$

$x^5-3x^3-x<0$

$x(x^4-3x^2-28)<0$

$x<0$ ①

$x^4-3x^2-28<0$ $\quad z=x^2$

$z^2-3z-28<0$

$z^2-3z-28=0$

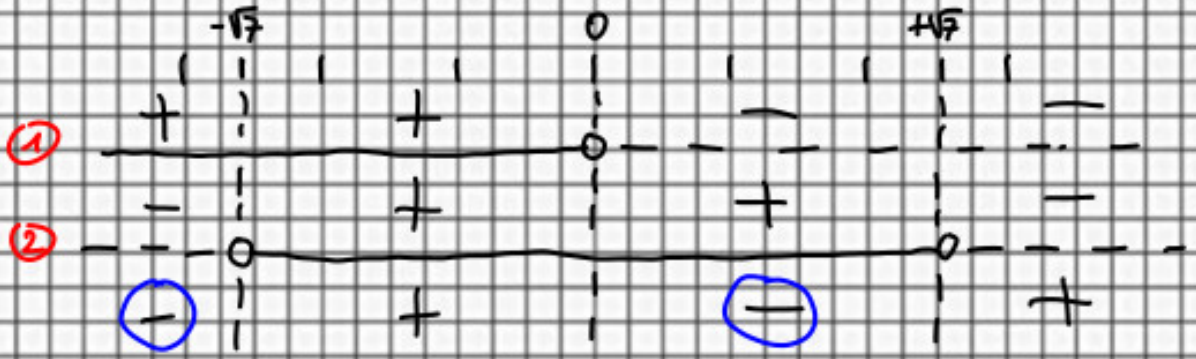
$z_{1,2}=\frac{3\pm 11}{2}=\begin{cases}\frac{-8}{2}=-4\\ \frac{14}{2}=7\end{cases}$ $\quad -4<z<7$

$-4<x^2<7$

$x^2>-4 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x^2<7$

$x=\pm\sqrt{7} \quad -\sqrt{7}<x<+\sqrt{7}$ ②



$x<-\sqrt{7} \quad \cup \quad 0<x<+\sqrt{7}$