Costi di produzione

QUANDO UN'AZIENDA PRODUCE UN CERTO BENE, SOSTIENE DIVERSI TIPI DI SPESE CHE GENERALMENTE SI DIVIDONO IN **COSTI FISSI** CHE NON DIPENDONO DALLA QUANTITÀ PRODOTTA (COME AD ESEMPIO AFFITTI O CONSUMI DI ENERGIA ELETTRICA), **COSTI VARIABILI PROPORZIONALI** ALLA QUANTITÀ PRODOTTA (COME AD ESEMPIO L'ACQUISTO DELLE MATERIE PRIME) E **COSTI VARIABILI NON PROPORZIONALI** (COME AD ESEMPIO I SALARI DELLE DIPENDENZE).
DI CONSEGUENZA SE CONSIDERIAMO IL **COSTO TOTALE** COME LA SOMMA DEI COSTI FISSI E DI QUELLI VARIABILI, QUESTO PUÒ ESSERE VISTO COME FUNZIONE DELLA QUANTITÀ DI BENE PRODOTTA, COSÌ SE

C_f COSTI FISSI

$C_v(x)$ COSTI VARIABILI PER LA QUANTITÀ x

ALLORA DEFINIAMO

$$C(x): y = C_v(x) + C_f \quad \text{CON } x \geq 0$$

LA **FUNZIONE DI COSTO TOTALE**, CHE È UNA FUNZIONE CRESCENTE DELLA QUANTITÀ x PUÒ ESSERE ESPRESSA DA DIVERSI TIPI DI RELAZIONI:

1-FUNZIONE DI PRIMO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

$$y = ax + b$$

CON

$a, b > 0$ QUANTITÀ POSITIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax \quad \text{E} \quad C_f = b$$

2 - FUNZIONE DI SECONDO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

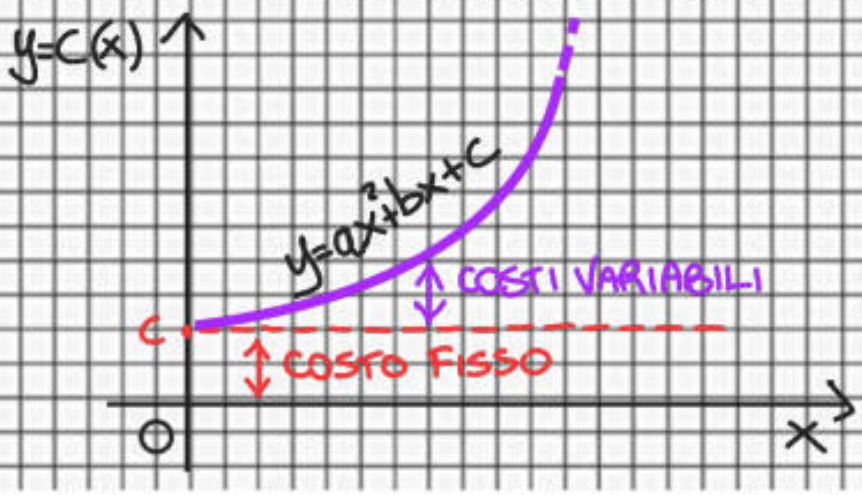
$$y = ax^2 + bx + c$$

CON

$a > 0$ QUANTITÁ POSITIVA

$b, c \geq 0$ QUANTITÁ NON NEGATIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA È



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax^2 + bx \quad \text{E} \quad C_f = c$$

3 - FUNZIONE DI TERZO GRADO

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

CON

$a > 0$ QUANTITÁ POSITIVA

$b, c, d \geq 0$ QUANTITÁ NON NEGATIVE

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA É



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \text{E} \quad C_f = d$$

4-FUNZIONE ESPONENZIALE

QUESTO TIPO DI FUNZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA

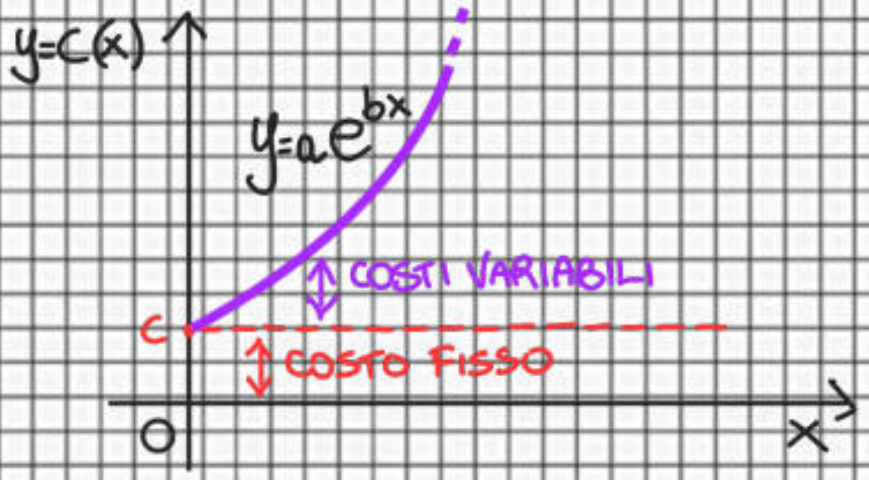
$$y = a e^{bx}$$

CON

$a, b > 0$ QUANTITÁ POSITIVE

ED e NUMERO DI NEPERO (CIRCA PARI A 2,71)

LA CUI RAPPRESENTAZIONE GRAFICA É



CON UNA SUDDIVISIONE DEI COSTI PARI A

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

DOVE

$$C_v(x) = e^{bx} \quad \text{E} \quad C_f = a$$

QUALUNQUE SIA LA RELAZIONE CHE ESPRIME IL COSTO TOTALE, QUANDO LA QUANTITÁ É NULLA CIOÉ

$$x = 0$$

IL COSTO TOTALE RAPPRESENTA SEMPRE E SOLO L'IMPORTO DEI COSTI FISSI, CIOÉ

$$y = C(0) = C_f$$

ESEMPIO

LA RELAZIONE CHE RAPPRESENTA I COSTI FISSI DI UN AZIENDA NEL PRODURRE UN CERTO BENE É RAPPRESENTATA DALLA SEGUENTE FUNZIONE

$$y = x^3 - 60x^2 + 1500x + 10000$$

DOVE NATURALMENTE x É LA QUANTITÁ DI BENE PRODOTTA.

RAPPRESENTIAMO GRAFICAMENTE LA FUNZIONE. PER IL SUO STUDIO SI CONSIDERA SOLO IL PRIMO QUADRANTE DEL PIANO CARTESIANO IN CUI $x>0$ ED $y>0$.

POI SE $x=0$ SI HA CHE $y=10000$ CIOÉ L'IMPORTO DEI COSTI FISSI.

CALCOLIAMO LA DERIVATA PRIMA

$$y' = 3x^2 - 120x + 1500$$

E VERIFICHIAMO CHE SIA SEMPRE POSITIVA A CONFERMA CHE LA FUNZIONE É CRESCENTE:

$$3x^2 - 120x + 1500 = 0 \Rightarrow x^2 - 40x + 500 = 0$$

$$\Delta = (-40)^2 - 4(1)(500) = 1600 - 2000 = -400 < 0$$

ED ESSENDO IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI 2° GRADO POSITIVO, ALLORA

$$y' > 0 \quad \text{PER OGNI } x$$

CALCOLIAMO LA DERIVATA SECONDA

$$y'' = 6x - 120$$

CHE SI ANNULLA IN

$$6x - 120 = 0$$

$$x = 20$$

DOVE

$$y = C(20) = 24{\,}000$$

ED È POSITIVA IN

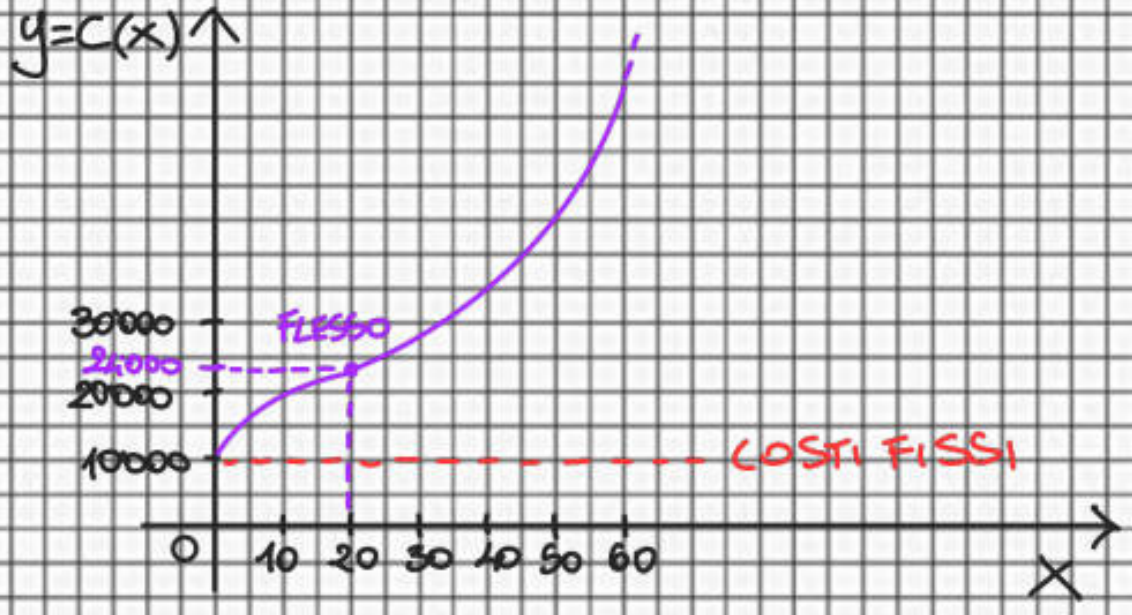
$$6x - 120 > 0$$

CIOÈ

$$x > 20$$

IL CHE SIGNIFICA CHE IN $x = 20$ LA CURVA DELLA FUNZIONE HA UN PUNTO DI FLESSO.

PROVIAMO ALLORA A TRACCIARE IL GRAFICO:



E POSSIAMO NOTARE CHE NEL PUNTO (20, 24000) C'È UN CAMBIAMENTO DI CONCAVITÀ DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE (FLESSO).

COSTO MEDIO O UNITARIO

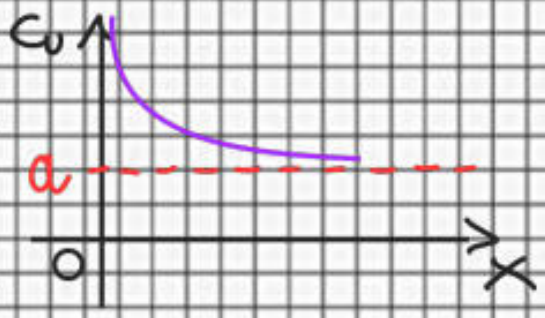
FACENDO UN ANALISI DEI COSTI DI PRODUZIONE SI DEFINISCE COSTO MEDIO O UNITARIO UN'ALTRA FUNZIONE, COME IL RAPPORTO TRA IL COSTO TOTALE E LA QUANTITÁ X PRODOTTA

$$C_u: \; y = \frac{C(x)}{x} \quad \text{CON } x>0$$

NEL CASO IN CUI LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE É DI PRIMO GRADO

$$C_u: \; y = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x} \quad \text{CON } \begin{matrix} x>0 \\ a,b>0 \end{matrix}$$

CHE É UN RAMO DI UN IPERBOLE EQUILATERA DI ASINTOTI $x=0$ E $y=a$, SEMPRE DECRESCENTE FINO AD UN VALORE MINIMO (a):



MENTRE NEL CASO IL COSTO TOTALE É UNA FUNZIONE DI 2° GRADO

$$C_u: \; y = \frac{ax^2+bx+c}{x} = ax+b+\frac{c}{x} \quad \text{CON } \begin{matrix} x>0 \\ a,b,c>0 \end{matrix}$$

CHE É UN RAMO DI UN IPERBOLE NON EQUILATERA DI ASINTOTI $x=0$ E $y=ax+b$:

Costi di produzione



CHE È DECRESCENTE FINO AD UN VALORE MINIMO E POI È CRESCENTE.

OSSERVAZIONE:

IN GENERALE LE CURVE DEL COSTO UNITARIO HANNO UN PUNTO DI MINIMO COSTO DOVUTO ALLA PRESENZA DEI COSTI FISSI.
IL VALORE DI MINIMO COSTO UNITARIO NEI MERCATI È DETTO PUNTO DI FUGA PERCHÉ SE IL PREZZO DI VENDITA FOSSE INFERIORE A QUEL VALORE SI ANDREBBE IN PERDITA E L'AZIENDA PRODUTTRICE DOVREBBE LASCIARE IL MERCATO.

ESEMPIO

I COSTI SOSTENUTI MENSILMENTE DA UNA AZIENDA SONO

- $C_f = €10'000$
- COSTO PER OGNI UNITÁ PRODOTTA €16
- COSTI DI MANUTENZIONE IMPIANTI PARI AL 4% DEL QUADRATO DEL NUMERO DI UNITÁ PRODOTTE

a) DETERMINARE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE
b) DETERMINARE LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO O UNITARIO
c) DETERMINARE LA QUANTITÁ PRODOTTA PER LA QUALE IL COSTO UNITARIO É MINIMO

---

a) LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE É

$$C(x): \; y = C_v(x) + C_f$$

CIOÉ

$$y = 0{,}04x^2 + 16x + 10'000 \quad \text{CON } x > 0$$

b) LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO O UNITARIO É

$$C_u(x): \; y = \frac{C(x)}{x}$$

CIOÉ

$$y = \frac{0{,}04x^2 + 16x + 10000}{x}$$

$$y = 0{,}04x + 16 + \frac{10000}{x} \quad \text{CON } x > 0$$

c) CALCOLIAMO IL PUNTO DI MINIMO PER IL COSTO MEDIO DETERMINANDO LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI COSTO MEDIO

$$y' = 0{,}04 - \frac{10'000}{x^2}$$

LA QUALE SI ANNULLA PER

$$0{,}04 - \frac{10'000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10'000}{0{,}04} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{250'000}$$

CIOÉ

$x_1 = -500$ NON ACCETTABILE PERCHÉ DEVE ESSERE $x > 0$

QUINDI

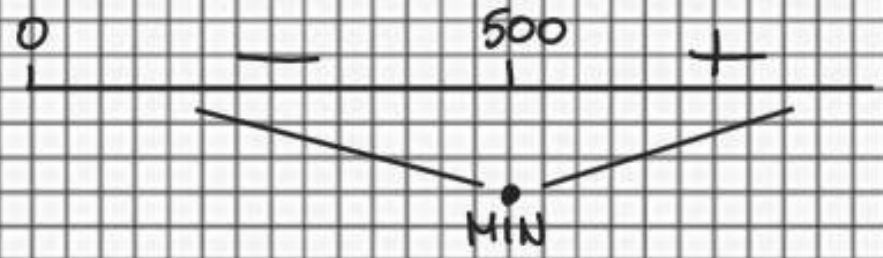
$$x_2 = +500$$

VERIFICHIAMO CHE PER $X=500$ LA FUNZIONE DI COSTO MEDIO HA UN MINIMO STUDIANDO IL SEGNO DELLA SUA DERIVATA PRIMA

$$0{,}04 - \frac{10000}{x^2} > 0 \quad \text{CON } X>0$$

CIOÈ

$$X > 500$$



QUINDI PER $X=500$ SI HA UN COSTO MINIMO CHE CORRISPONDE A

$$C_u(500): \quad y = 0{,}04 \cdot 500 + 16 + \frac{10000}{500}$$

$$y = 20 + 16 + 20$$

$$\boxed{y = 56 €}$$

COSTO MARGINALE

NELL'ANALISI DEI COSTI DI PRODUZIONE SI DEFINISCE COSTO MARGINALE UNA ULTERIORE FUNZIONE COME IL RAPPORTO TRA LA VARIAZIONE DEL COSTO TOTALE E VARIAZIONE DELLA QUANTITÁ X PRODOTTA.

SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DEFINITA NEL DISCRETO O NON È DERIVABILE IL COSTO MARGINALE È IL RAPPORTO INCREMENTALE TRA INCREMENTO DEL COSTO E INCREMENTO DELLA QUANTITÁ PRODOTTA, CIOÈ:

Costi di produzione

$$C_m(x): \; y = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$$

MENTRE SE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È DEFINITA NEL CONTINUO O È DERIVABILE IL COSTO MARGINALE È LA DERIVATA DELLA FUNZIONE DI COSTO TOTALE RISPETTO ALLA QUANTITÀ PRODOTTA X, CIOÈ:

$$C_m(x): \; y' = \frac{d\,C(x)}{dx}$$

DI CONSEGUENZA È INTUITIVO VERIFICARE CHE SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DI PRIMO GRADO IL COSTO MARGINALE SARÀ UNA COSTANTE, MENTRE SE LA FUNZIONE DI COSTO TOTALE È DI SECONDO GRADO IL COSTO MARGINALE È A SUA VOLTA UNA FUNZIONE LINEARE (DI PRIMO GRADO).

OSSERVAZIONE:

IL COSTO MARGINALE È IL COSTO SOSTENUTO PER OTTENERE UNA UNITÀ ADDIZIONALE DI PRODOTTO.

PROPRIETÀ

LE CURVE DEL COSTO MEDIO E DEL COSTO MARGINALE HANNO LO STESSO VALORE NEI PUNTI IN CUI LA DERIVATA DEL COSTO MEDIO SI ANNULLA, INFATTI:

$$C_u(x): \; y = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C_u'(x): \; y' = \frac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2}$$

E PONENDOLA UGUALE A ZERO SI OTTIENE

Costi di produzione

$$y'=0 \Rightarrow \frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}=0 \Rightarrow x\cdot C'(x)-C(x)=0$$

DALLA QUALE

$$C'(x)=\frac{C(x)}{x}$$

CIOÉ

COSTO MARGINALE = COSTO MEDIO

DA QUESTA RELAZIONE É EVIDENTE COME CAMBIA LA CRESCENZA O LA DECRESCENZA DEL COSTO MEDIO, INFATTI ESSENDO LA DERIVATA PRIMA DEL COSTO MEDIO O UNITARIO PARI A

$$C'_U(x): y'=\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(C'(x)-\frac{C(x)}{x}\right)$$

ALLORA

I] SE $C'(x)<\frac{C(x)}{x}$ CIOÉ SE IL COSTO MARGINALE É INFERIORE AL COSTO MEDIO, ALLORA $y'<0$ E IL **COSTO MEDIO É DECRESCENTE**.

II] SE $C'(x)=\frac{C(x)}{x}$ CIOÉ SE IL COSTO MARGINALE É UGUALE AL COSTO MEDIO, ALLORA $y'=0$.

III] SE $C'(x)$ $\frac{C(x)}{x}$ CIOÉ SE IL COSTO MARGINALE É MAGGIORE DEL COSTO MEDIO, ALLORA $y'>0$ E IL **COSTO MEDIO É CRESCENTE**.

ESERCIZI

1 DATA LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE

$$y = 0{,}25x^2 + 200x + 10000$$

LA FUNZIONE DEL COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_U(x) = \frac{0{,}25x^2 + 200x + 10000}{x} = 0{,}25x + 200 + \frac{10000}{x}$$

MENTRE LA FUNZIONE DEL COSTO MARGINALE È

$$C_m(x) = 0{,}50x + 200$$

RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE FUNZIONI DEL COSTO MEDIO O UNITARIO E DEL COSTO MARGINALE.
IL COSTO MEDIO È UN'IPERBOLE CON ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$ ED UN ASINTOTO OBLIQUO IN $y=0{,}25x+200$.
LA SUA DERIVATA PRIMA È

$$C'_U(x) = 0{,}25 - \frac{10000}{x^2}$$

E SI ANNULLA PER

$$0{,}25 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{10000}{0{,}25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{40000}$$

CIOÈ

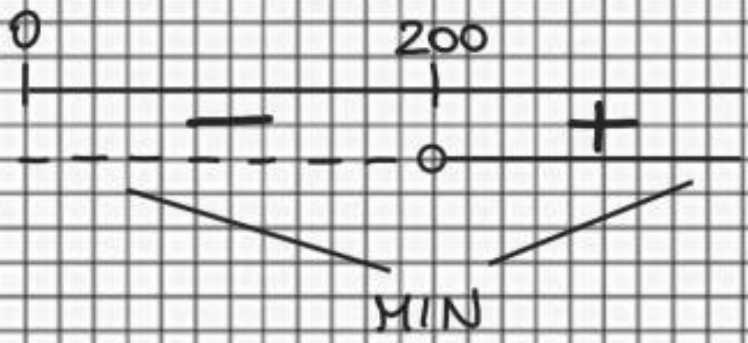
$$x_1 = -200 \quad \text{E} \quad x_2 = +200$$

CONSIDERANDO SOLO VALORI DI x POSITIVI VERIFICHIAMO DOVE È POSITIVA (IL SUO SEGNO):

$$C'_U(x) > 0 \Rightarrow 0{,}25 - \frac{10000}{x^2} > 0 \Rightarrow x < -200 \cup x > +200$$

Costi di produzione

COSÌ

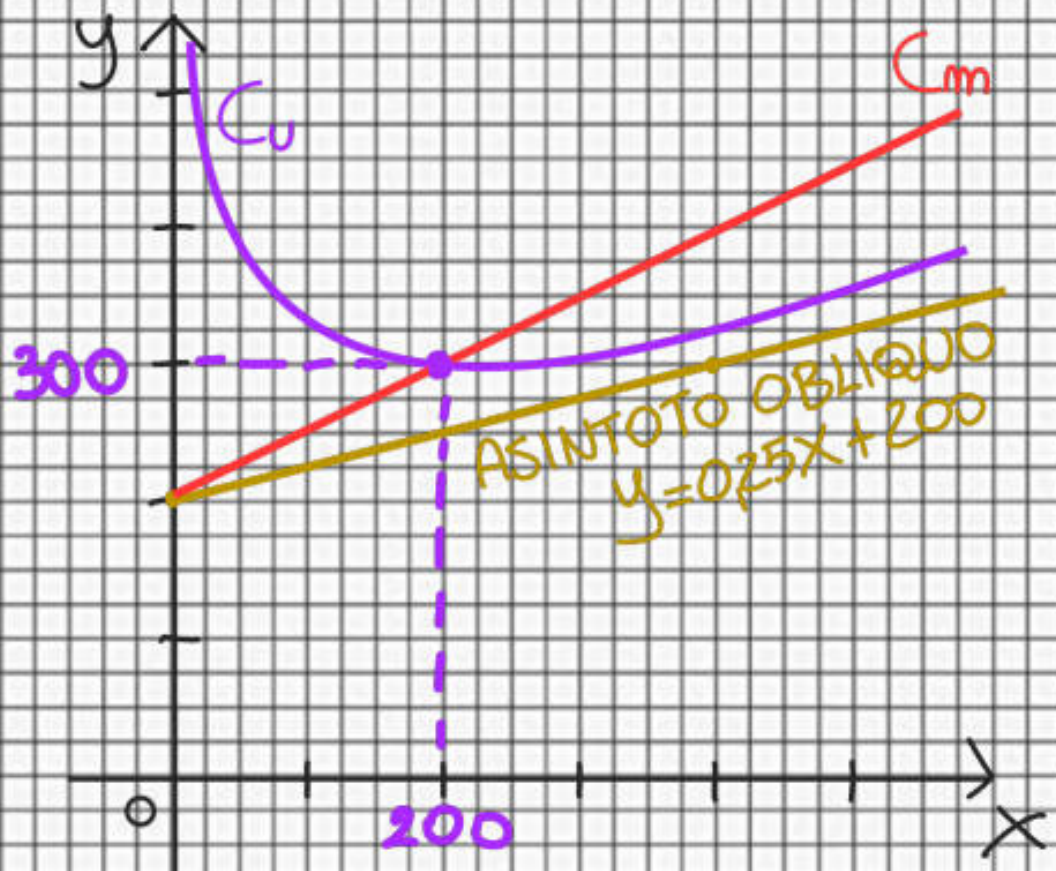


QUINDI HA UN PUNTO DI MINIMO IN

$$C_u(200) = 0{,}25 \cdot 200 + 200 + \frac{10.000}{200} = 300$$

$$P(200;300)$$

MENTRE IL COSTO MARGINALE È UNA RETTA DI COEFFICIENTE ANGOLARE 0,50 E TERMINE NOTO 200 CHE PASSA PER IL MINIMO (200;300).



Costi di produzione

2 PER PRODURRE UN CERTO BENE UN AZIENDA CON UNA CAPACITÁ PRODUTTIVA MASSIMA MENSILE DI 250 UNITÁ, SOSTIENE MENSILMENTE I SEGUENTI COSTI:

- € 6'000 DI AFFITTO STRUTTURE
- € 50 PER OGNI UNITÁ PRODOTTA
- 10% DEL QUADRATO DEL NUMERO DI UNITÁ PRODOTTE PER STIPENDI DIPENDENTI

a) DETERMINARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE.

b) DETERMINARE PER QUALE QUANTITÁ PRODOTTA I COSTI VARIABILI UGUAGLIANO IL COSTO FISSO.

---

a) I COSTI CHE NON DIPENDONO DALLA QUANTITÁ X (COSTI FISSI) SONO

$$C_f = 6000$$

MENTRE QUELLI CHE DIPENDONO DALLA QUANTITÁ X (COSTI VARIABILI) SONO

$$C_v(x) = 0{,}1x^2 + 50x$$

QUINDI LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

CIOÈ

$$y = 0{,}1x^2 + 50x + 6000$$

CHE È UNA FUNZIONE DI SECONDO GRADO, E CIOÈ

Costi di produzione

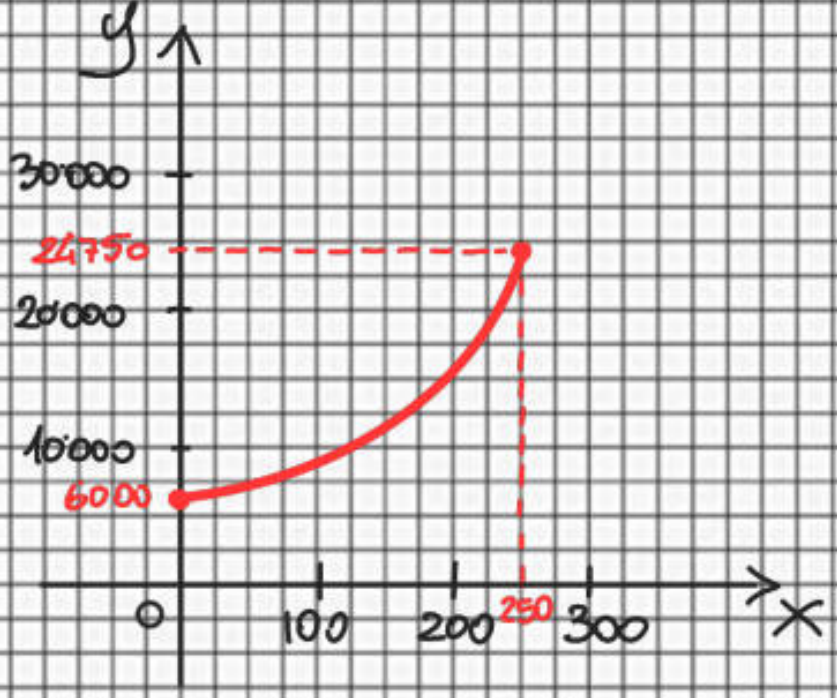
IL RAMO DI UNA PARABOLA PER $0 \leq x \leq 250$ PER LA CAPACITÁ MASSIMA PRODUTTIVA DELL'AZIENDA. COSÍ

SE $x=0 \Rightarrow y=6000$ (SOLO I COSTI FISSI)

SE $x=250 \Rightarrow y=24{,}750$ (COSTI PER 250 UNITÁ)

QUINDI IL RAMO DELLA PARABOLA (CON CONCAVITÁ VERSO L'ALTO) PASSA PER I PUNTI

$(0;6000)$ E $(250;24750)$



b) SE SI EQUAGLIANO I COSTI VARIABILI E I COSTI FISSI

$$C_v(x) = C_f$$

SI OTTIENE L'EQUAZIONE

$$0{,}1x^2 + 50x = 6000$$

CIOÉ

$$0{,}1x^2 + 50x - 6000 = 0$$

CHE HA COME SOLUZIONI

Costi di produzione

$\Delta = 50^2 - 4 \cdot (0{,}1) \cdot (-6000) = 2500 + 2400 = 4900$

$x_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{4900}}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{-50 \pm 70}{0{,}2} = \begin{cases} \frac{-120}{0{,}2} = -600 \\ \frac{+20}{0{,}2} = +100 \end{cases}$

3 PER PRODURRE UN CERTO BENE UN AZIENDA CON UNA CAPACITÁ PRODUTTIVA MASSIMA SETTIMANALE DI 200 Kg, SOSTIENE SETTIMANALMENTE I SEGUENTI COSTI:

- € 2'000 DI AFFITTO STRUTTURE
- € 80 PER OGNI KILOGRAMMO PRODOTTO

a) DETERMINARE E RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE LE FUNZIONI DEL COSTO TOTALE, DEL COSTO MEDIO O UNITARIO E DEL COSTO MARGINALE.

b) CALCOLARE PER QUALE QUANTITÁ DI MERCE PRODOTTA IL COSTO UNITARIO È MINIMO.

a) I COSTI FISSI SONO

$$C_f = 2'000$$

MENTRE I COSTI VARIABILI SONO

$$C_v(x) = 80x$$

LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È

$$C(x) = C_v(x) + C_f$$

CIOÈ $y = 80x + 2000$ CON $0 \leq x \leq 200$

LA FUNZIONE DEL COSTO MEDIO O UNITARIO È

$$C_u(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Costi di produzione

CIOÈ $y = \frac{80x + 2000}{x} = 80 + \frac{2000}{x}$ CON $0 \leq x \leq 200$

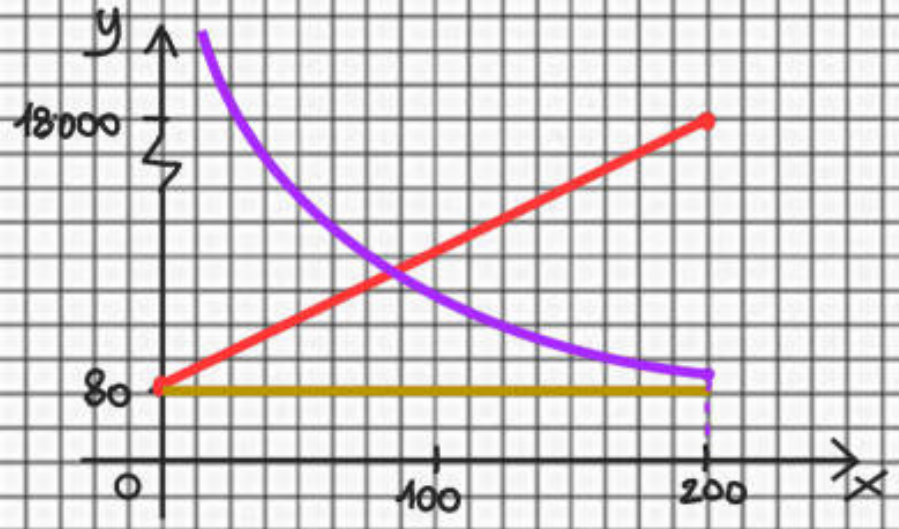
MENTRE LA FUNZIONE DEL COSTO MARGINALE È

$$C_m(x) = C'(x)$$

CIOÈ

$$y = 80$$

GRAFICAMENTE LA FUNZIONE DEL COSTO TOTALE È UN SEGMENTO DI RETTA, MENTRE QUELLA DEL COSTO UNITARIO È UN RAMO DI IPERBOLE EQUILATERA CON ASINTOTO VERTICALE IN $x=0$ E ASINTOTO ORIZZONTALE IN $y=80$, E QUELLA DEL COSTO MARGINALE È ANCHESSO UN SEGMENTO DI RETTA.



b) VISTO CHE IL COSTO UNITARIO È UNA IPERBOLE, CIOÈ UNA FUNZIONE DECRESCENTE, RAGGIUNGE IL SUO MINIMO PROPRIO NEL VALORE ESTREMO $x=200$, ALLORA IL COSTO UNITARIO MINIMO PER TALE QUANTITÀ È:

$$C_u(200) = 80 + \frac{2000}{200} = 80 + 10 = 90$$

CIOÈ

€ 90