Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

LA MATEMATICA FINANZIARIA È QUELLA PARTE DI MATEMATICA APPLICATA CHE RIGUARDA LO STUDIO DEI PROBLEMI INERENTI LA FINANZA E LE OPERAZIONI LEGATE AD INVESTIMENTI ECONOMICI.

CONSIDERANDO UN INVESTIMENTO ECONOMICO COME UN'OPERAZIONE FINANZIARIA IN CUI SI INVESTE DEL CAPITALE IN DENARO, L'INTERESSE È IL FRUTTO RESO DALL'INVESTIMENTO DEL CAPITALE INIZIALE.

PER ESPOSIZIONE IN GENERALE SI INTENDE IL PERIODO DI TEMPO CHE INTERCORRE DAL MOMENTO IN CUI SI SBORSA IL CAPITALE INIZIALE FINO AL MOMENTO IN CUI SI REINCASSA LO STESSO, CON L'AGGIUNTA DEGLI INTERESSI MATURATI, SOMMA FINALE CHE PRENDE IL NOME DI MONTANTE.

NEL CORSO DELL'ESPOSIZIONE PER IL CALCOLO DELL'INTERESSE SI FÀ RIFERIMENTO A DUE DIVERSE TIPOLOGIE O REGIMI:

- IL REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE
- IL REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

IL REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE

QUESTO TIPO DI REGIME SI HA QUANDO L'INTERESSE È PROPORZIONALE AL CAPITALE ED AL TEMPO, CIOÈ

$$I = K \cdot i \cdot t$$

DOVE

K = CAPITALE INVESTITO
i = TASSO D'INTERESSE ANNUO
t = DURATA INVESTIMENTO (ESPOSIZIONE)

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

QUINDI IL MONTANTE SARÀ

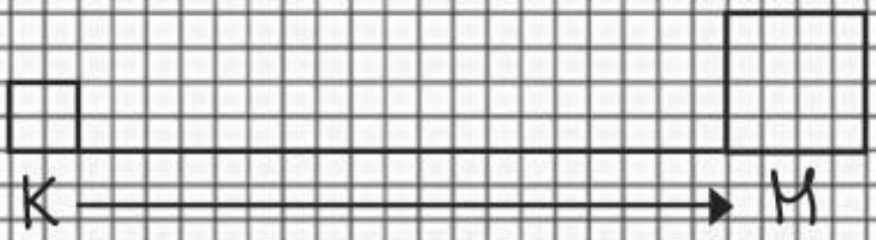
$$M = K + I$$

COSÍ

$$M = K + K \cdot i \cdot t = K(1 + it)$$

DOVE $(1+it)$ È IL FATTORE DI MONTANTE

CIOÈ



FATTORE DI MONTANTE $= (1+it)$

MONTANTE = CAPITALE INVESTITO × FATTORE DI MONTANTE

ESEMPIO

SI INVESTE UN CAPITALE INIZIALE $K=100$ PER UN PERIODO DI 1 ANNO AD UN TASSO DI INTERESSE i DEL 10% ANNUO:

$K=100 \qquad (1+it) = (1+0{,}1 \cdot 1) = 1{,}1$

$M = K(1{,}1) = 100(1{,}1) = 110$

LE IPOTESI FONDAMENTALI ALLA BASE DEL REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE SONO 2:

- L'INTERESSE È CORRISPOSTO UNA SOLA VOLTA ALLA SCADENZA DELL'OPERAZIONE FINANZIARIA.
- L'INTERESSE NON CAPITALIZZA, CIOÈ NON DIVENTA ESSO STESSO CAPITALE E QUINDI NON GENERA ALTRO INTERESSE.

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

PER QUESTI MOTIVI QUESTO TIPO D'INTERESSE NON È FAVOREVOLE AL CREDITORE (CIOÈ CHI INVESTE IL DENARO), IN QUANTO DURANTE LA VITA DEL PRESTITO NÉ INCASSA E NÉ CAPITALIZZA L'INTERESSE.
PER TUTTE QUESTE RAGIONI IL REGIME DELL'INTERESSE SEMPLICE È UTILIZZATO PER OPERAZIONI DI BREVE DURATA (NON OLTRE L'ANNO O I 18 MESI).
SE IL PERIODO È INFERIORE ALL'ANNO (MESI O GIORNI) IL TASSO ANNUALE VIENE MOLTIPLICATO PER IL RAPPORTO TRA L'UNITÀ DI MISURA TEMPORALE E L'ANNO ESPRESSO IN MESI O GIORNI, COSÌ IL MONTANTE SARÀ:

$$M = K \cdot \left[1 + i\left(\frac{m}{12}\right)\right] \quad \text{CON } m = \text{NUMERO MESI}$$

OPPURE

$$M = K \cdot \left[1 + i\left(\frac{g}{360}\right)\right] \quad \text{CON } g = \text{NUMERO GIORNI}$$

ESEMPI

1 $K = 100$ DURATA = 3 mesi $i = 10\%$ ANNUO

$$M = 100\left[1 + 0{,}1 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)\right] = 100 \cdot [1 + 0{,}025] = 100 \cdot 1{,}025 = 102{,}5$$

2 $K = 100$ DURATA = 90 GIORNI $i = 10\%$ ANNUO

$$M = 100\left[1 + 0{,}1 \cdot \left(\frac{90}{360}\right)\right] = 100 \cdot [1 + 0{,}025] = 100 \cdot 1{,}025 = 102{,}5$$

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

PROBLEMI INVERSI

L'INCOGNITA È IL CAPITALE DA INVESTIRE

NOTO IL MONTANTE, IL TASSO E LA DURATA, SAPENDO CHE:

$$M = K(1+it)$$

ALLORA DIVIDENDO L'EQUAZIONE DEL MONTANTE PER IL FATTORE DI MONTANTE SI OTTIENE:

$$\frac{M}{(1+i\cdot t)} = \frac{K\cancel{(1+i\cdot t)}}{\cancel{(1+i\cdot t)}}$$

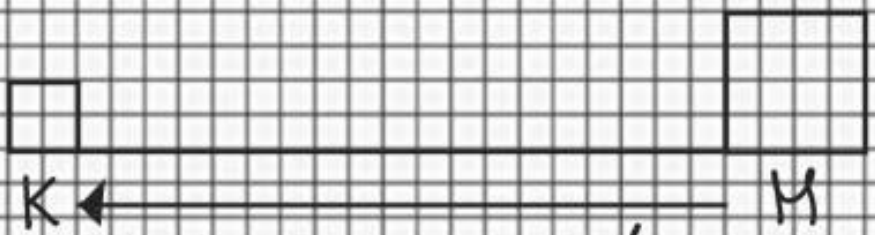
COSÍ

$$K = \frac{M}{(1+i\cdot t)} = M\cdot\frac{1}{(1+it)}$$

DOVE

$\frac{1}{(1+i\cdot t)}$ FATTORE DI SCONTO O ATTUALIZZAZIONE

CIOÈ



FATTORE DI SCONTO O ATTUALIZZAZIONE $= \frac{1}{(1+it)}$

CAPITALE INVESTITO = MONTANTE × FATTORE DI SCONTO

SI RIPORTA AL MOMENTO ATTUALE IL CAPITALE M SCONTANDOLO AL TASSO i, E NATURALMENTE

$$K < M$$

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

ESEMPI

1 $M=108$ DURATA = 1 ANNO $i=10\%$ ANNUO

$$K=\frac{M}{(1+it)}=\frac{108}{(1+0{,}1\cdot 1)}=\frac{108}{1{,}1}=98{,}\overline{18}$$

QUINDI IL CAPITALE DA INVESTIRE OGGI PER AVERE TRA UN ANNO UN MONTANTE DI €108 AL 10% DI INTERESSE ANNUO È €98,18.

2 $M=106$ DURATA = 6 MESI $i=8\%$ ANNUO

$$K=\frac{106}{\left[1+0{,}08\cdot\left(\frac{6}{12}\right)\right]}=\frac{106}{1{,}04}=101{,}92$$

L'INCOGNITA È LA DURATA DELL'INVESTIMENTO

NOTO IL CAPITALE, IL MONTANTE ED IL TASSO D'INTERESSE SAPENDO CHE

$$M=K(1+it)$$

ALLORA

$$M=K+K\cdot i\cdot t$$

E

$$M-K=K\cdot i\cdot t$$

MA

$$M-K=I$$

COSÌ

$$I=K\cdot i\cdot t$$

DALLA QUALE

$$t=\frac{I}{K\cdot i}$$

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

ESEMPIO

$M=110 \quad K=95 \quad i=12\% \rightarrow I=M-K=110-95=15$

$$t=\frac{15}{95\cdot 0{,}12}=\frac{15}{11{,}4}=1{,}32$$

CIOÈ

$1{,}32-1=0{,}32$ UN ANNO E

$0{,}32\cdot 360=115{,}2$ 115 GIORNI

QUINDI INVESTENDO 95 SE SI VUOLE OTTENERE 110 AD UN TASSO DEL 12% ANNUO L'OPERAZIONE DEVE DURARE 1 ANNO 3 MESI E 25 GIORNI.

L'INCOGNITA È IL TASSO D'INTERESSE

DALLA FORMULA PER CALCOLARE LA DURATA SAPPIAMO CHE:

$$t=\frac{I}{iK}$$

MA DIVIDENDO PER t E MOLTIPLICANDO PER i ENTRAMBI I MEMBRI SI OTTIENE

$$\frac{i}{t}\cdot t=\frac{I}{iK}\cdot\frac{i}{t}$$

CIOÈ

$$i=\frac{I}{K\cdot t}$$

ESEMPIO

$M=110 \quad K=95$ DURATA = 1 ANNO 3 MESI E 25 GIORNI

1 ANNO $\longrightarrow$ 1

3 MESI E 25 GIORNI $\longrightarrow \frac{90+25}{360} \cong 0{,}32$

ALLORA $t = 1{,}32$

$I = 110 - 95 = 15$

E

$$i = \frac{15}{t \cdot K} = \frac{15}{1{,}32 \cdot 95} = 0{,}12 \longrightarrow 12\%$$

IL REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO

NEL REGIME DELL'INTERESSE COMPOSTO, LA DIFFERENZA DA QUELLO SEMPLICE STA NEL FATTO CHE IN ESSO AVVIENE LA CAPITALIZZAZIONE PERIODICA DEGLI INTERESSI CHE GENERANO A LORO VOLTA INTERESSI.
SE AD ESEMPIO SI INVESTE PER 2 ANNI UN CAPITALE DI 100€ AD UN TASSO ANNUO DELL'8% GLI INTERESSI SONO CORRISPOSTI E REINVESTITI ALLA FINE DI OGNI ANNO, CIOÉ DOPO 1 ANNO IL MONTANTE É:

$$M(1) = K(1+i)$$

QUINDI

$$M(1) = 100(1+0{,}08) = 100(1{,}08) = 108€$$

QUESTO MONTANTE VIENE REINVESTITO PER UN ANNO AL TASSO DELL'8%:

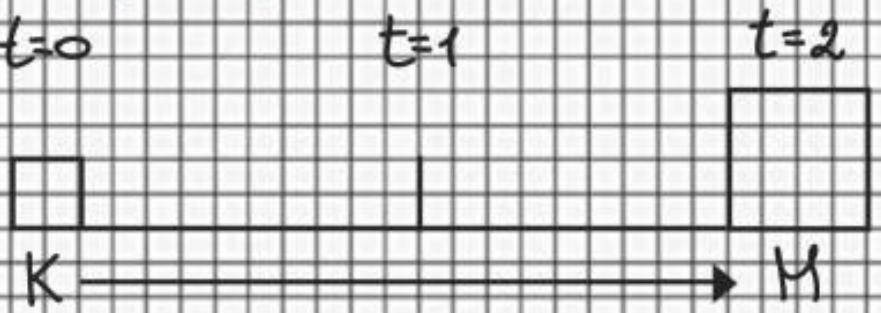
$$M(2) = M(1)(1+i) = K(1+i)(1+i) = K(1+i)^2$$

QUINDI

$$M(2) = 100(1+0{,}08)^2 = 116{,}64€$$

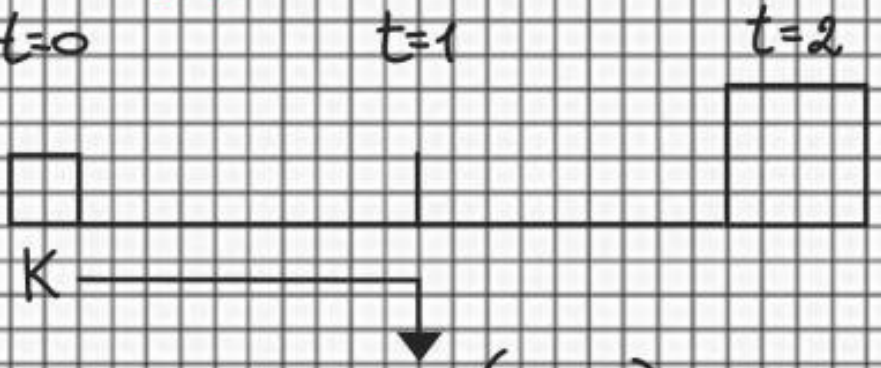
Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

CIOÈ, IN REGIME DI INTERESSE SEMPLICE:



FATTORE DI MONTANTE = $(1+i2)$

MENTRE IN REGIME DI INTERESSE COMPOSTO:



$$M(1) = K(1+i)$$

$$\hookrightarrow M(2) = K(1+i)^2$$

IL MONTANTE FINALE PUÒ ESSERE SCOMPOSTO IN CAPITALE, INTERESSE ED INTERESSE SU INTERESSE, SVILUPPANDO IL QUADRATO DELL'EQUAZIONE E MOLTIPLICANDO PER K:

$$K(1+i)^2 = K(1+2i+i^2) =$$

$$K + 2Ki + K \cdot i^2$$

CAPITALE — INTERESSE — INTERESSE SU INTERESSE

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

NEL NOSTRO ESEMPIO

$$M(2) = 116{,}64 = 100 + 2 \cdot 100 \cdot 0{,}8 + 100 \cdot 0{,}8^2$$

$$M(2) = \boxed{100} + \boxed{16} + \boxed{0{,}64}$$

CAPITALE + INTERESSE + INTERESSE SU INTERESSE

SE LA CAPITALIZZAZIONE È ANNUALE E IL NUMERO DEGLI ANNI È INTERO, L'EQUAZIONE DEL MONTANTE FINALE È QUINDI:

$$M = K(1+i)^t$$

DOVE

t = NUMERO ANNI (INTERO)

SE IL NUMERO DI ANNI NON È INTERO, AD ESEMPIO 2 ANNI-4 MESI-24 GIORNI, CHE CORRISPONDONO A

2 ANNI $\longrightarrow$ 2

4 MESI $\longrightarrow \frac{4}{12} \cong 0{,}33$

24 GIORNI $\longrightarrow \frac{24}{360} \cong 0{,}07$

$+ \longrightarrow 0{,}40$

CIOÈ 2,40 E L'EQUAZIONE DEL MONTANTE FINALE È:

$$M = K(1+i)^t \cdot (1+i)^f = K(1+i)^{t+f}$$

DOVE t = ANNI PARTE INTERA

f = ANNI PARTE FRAZIONARIA

FORMULA QUESTA CHE PRENDE IL NOME DI MONTANTE CON FORMULA ESPONENZIALE.

CHE NELL'ULTIMO ESEMPIO SUPPONENDO SEMPRE $K=100$ ED $i=8\%$, SARÀ:

$$M=100(1{,}08)^{2{,}40}=120{,}29€$$

ANCHE SE SI PREFERISCE RICORRERE SEMPRE A QUESTA FORMULA, IL MONTANTE FINALE PUÒ ESSERE CALCOLATO ANCHE CON LA FORMULA LINEARE:

$$M=K(1+i)^{t}(1+if)$$

CHE NEL NOSTRO ESEMPIO SARÀ

$$M=100(1{,}08)^{2}\cdot(1{,}032)=120{,}37$$

OSSERVAZIONE:

SI PUÓ NOTARE CHE

$$M(\text{ESPONENZIALE})<M(\text{LINEARE})$$

CIOÈ

$$120{,}29<120{,}37$$

SE LA CAPITALIZZAZIONE È FRAZIONATA CIOÈ SE IL PERIODO DI CAPITALIZZAZIONE É INFERIORE ALL'ANNO E IL TASSO È ANNUO ALLORA SI CONVERTE IL TASSO ANNUO i IN PERIODALE E SI MOLTIPLICA LA DURATA PER IL NUMERO DI CAPITALIZZAZIONI ANNUE:

$$M=K\left[1+\left(\frac{i}{m}\right)\right]^{t\cdot m}$$

TASSO ANNUO PERIODALE

DURATA PER N° DI CAPITALIZZAZIONI ANNUE

DOVE (m) = NUMERO DI CAPITALIZZAZIONI ANNUE ED t = DURATA

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

CONSIDERANDO SEMPRE L'ESEMPIO IN CUI $K=100$ ED $i=8\%$ ANNUO, CON UNA DURATA t DI 3 ANNI ED UNA FREQUENZA DI CAPITALIZZAZIONE SEMESTRALE:

$$K=100 \quad i=8\% \quad t=3 \quad m=2$$

$$M=K\left[1+\frac{0{,}08}{2}\right]^{3\times 2}$$

$$M=100\left[1{,}04\right]^{6}=126{,}53€$$

SE $m=4$

$$M=K\left[1+\frac{0{,}08}{4}\right]^{3\times 4}$$

$$M=100\left[1{,}02\right]^{12}=126{,}82€$$

IN QUESTO CASO SI DICE CHE IL TASSO ANNUO i È CONVERTIBILE m VOLTE L'ANNO.

IL TASSO ANNUO CONVERTIBILE È UN TASSO NOMINALE E NON EFFETTIVO.

IL TASSO EFFETTIVO ANNUO CON UNA CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA È MAGGIORE DI QUELLO NOMINALE.

CONOSCENDO IL TASSO NOMINALE ANNUO E LA FREQUENZA DI CAPITALIZZAZIONE, IL TASSO EFFETTIVO SI OTTIENE PARTENDO DALLA EQUAZIONE:

$$\left(1+i_{EFF.}\right)^{t}=\left[1+\frac{i}{m}\right]^{t\times m}$$

DOVE

m = NUMERO DI CAPIT. ANNUE O FREQUENZA DI CAPIT.

t = DURATA

DALLA QUALE:

$$\sqrt[t]{(1+i_{EFF.})^t} = \sqrt[t]{\left[1+\left(\frac{i}{m}\right)\right]^{t\times m}}$$

$$i_{EFF.} = \left[1+\left(\frac{i}{m}\right)\right]^{m} - 1$$

MENTRE NEL CASO DELLA CAPITALIZZAZIONE ANNUALE SE SI HA IL CAPITALE K, IL MONTANTE M E LA DURATA t:

$$i_{EFF.} = \left(\sqrt[t]{\frac{M}{K}}\right) - 1$$

ESEMPIO

$K=100 \quad i=8\% \quad t=3 \Rightarrow M=100(1+0{,}08)^3=125{,}97$

a SE $m=1$ CAPITALIZZAZIONE ANNUALE

$$i_{EFF.} = \left(\sqrt[3]{\frac{125{,}97}{100}}\right) - 1 = 0{,}08 \longrightarrow i = i_{EFF.}$$

b SE $m=2$ CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA (SEMESTRALE)

$$i_{EFF.} = \left[1+\frac{0{,}08}{2}\right]^2 - 1 = 0{,}0816 \longrightarrow i < i_{EFF.}$$

c SE $m=4$ CAPITALIZZAZIONE FRAZIONATA (QUADRIMESTRALE)

$$i_{EFF.} = \left[1+\frac{0{,}08}{4}\right]^4 - 1 = 0{,}0824 \longrightarrow i < i_{EFF.}$$

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

PROBLEMI INVERSI

L'INCOGNITA È IL CAPITALE DA INVESTIRE

NOTO IL MONTANTE M, IL TASSO i E LA DURATA t, SAPENDO CHE:

CAPITALIZZAZIONE ANNUALE	CAPITALIZZAZIONE FRAZIONARIA m
$M = K(1+i)^t$	$M = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{t \cdot m}$

ALLORA

$$K = \frac{M}{(1+i)^t} = M(1+i)^{-t} \qquad K = \frac{M}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{t \cdot m}} = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-t \cdot m}$$

ESEMPI

1 SAPENDO CHE IL CAPITALE DISPONIBILE TRA 2 ANNI È 116,64€ CON UN TASSO DI INTERESSE ANNUALE DELL'8%, IN UN REGIME DI INTERESSE COMPOSTO CON CAPITALIZZAZIONE ANNUALE, DETERMINARE IL CAPITALE INVESTITO:

$$K = M(1+i)^{-t} = 116{,}64(1{,}08)^{-2} = 100€$$

2 $M = 130€$ $i = 8\%$ $t = 3$ ANNI E 5 MESI

$$t = 3 + \frac{5}{12} = 3{,}4167$$

$$K = 130(1+0{,}08)^{-3{,}4167} = 99{,}94€$$

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

L'INCOGNITA È LA DURATA DELL'INVESTIMENTO

NOTO IL CAPITALE, IL MONTANTE ED IL TASSO D'INTERESSE SAPENDO CHE:

CAPITALIZZAZIONE ANNUALE

$$M = K(1+i)^t$$

$$\frac{M}{K} = (1+i)^t$$

CAPITALIZZAZIONE FRAZIONARIA m

$$M = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{t\cdot m}$$

ALLORA

$$\frac{M}{K} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{t\cdot m}$$

VISTO CHE IN ENTRAMBI I CASI, I 2 MEMBRI SONO QUANTITÀ SICURAMENTE POSITIVE, POSSIAMO APPLICARE LA FUNZIONE LOGARITMO NATURALE E SFRUTTARE LE SUE PROPRIETÀ, CIOÈ:

$$\ln\frac{M}{K} = \ln(1+i)^t$$

$$\ln\frac{M}{K} = t\cdot\ln(1+i)$$

$$t = \frac{\ln\frac{M}{K}}{\ln(1+i)}$$

$$\ln\frac{M}{K} = \ln\left(1+\frac{i}{m}\right)^{t\cdot m}$$

$$\ln\frac{M}{K} = t\cdot m\cdot\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$$

$$t = \frac{\ln\frac{M}{K}}{m\cdot\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

ESEMPIO

$K = 99{,}94€ \quad M = 130€ \quad i = 8\%$

$$t = \frac{\ln 1{,}3001}{\ln 1{,}08} = 3{,}417 \rightarrow 3 \text{ ANNI E } 0{,}417\cdot 12 = 5 \text{ MESI}$$

Elementi di matematica finanziaria (ESEMPI)

L'INCOGNITA È IL TASSO D'INTERESSE

DATI I VALORI DI K, M E t:

CAPITALIZZAZIONE ANNUALE	CAPITALIZZAZIONE FRAZIONARIA m
$M = K(1+i)^t$	$M = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{t \cdot m}$

ALLORA

$\frac{M}{K} = (1+i)^t$	$\frac{M}{K} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{t \cdot m}$

CIOÈ

$\sqrt[t]{\frac{M}{K}} = (1+i)$	$\sqrt[t \cdot m]{\frac{M}{K}} = \left(1+\frac{i}{m}\right)$

COSÌ

$i = \left(\sqrt[t]{\frac{M}{K}}\right) - 1$	$i = m\left[\left(\sqrt[t \cdot m]{\frac{M}{K}}\right) - 1\right]$

ESEMPIO

$K = 99{,}94 €$ $M = 130 €$ $t = 3$ ANNI E 5 MESI

3 ANNI $\rightarrow 3$ + 5 MESI $\rightarrow \frac{5}{12} = 0{,}417$

$t = 3{,}417$

$$i = \left(\sqrt[3{,}417]{\frac{130}{99{,}94}}\right) - 1 = \left(\frac{130}{99{,}94}\right)^{\frac{1}{3{,}417}} - 1 \cong 0{,}08$$