

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

SE UNA EQUAZIONE O DISEQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL 2° NON HA UNA FORMA NOTA, PER RISOLVERLA BISOGNA PROCEDERE MEDIANTE OPERAZIONI ALGEBRICHE SULLA SUA ESPRESSIONE IN MODO DA POTERLA RISCRIVERE COME UNA FATTORIZZAZIONE IN CUI I SINGOLI FATTORI SONO DELLE SCRITTURE ALGEBRICHE IN UNA FORMA NOTA E PIÙ FACILMENTE TRATTABILE COME ESPRESSIONI DI 1° GRADO, DI 2° GRADO, FORME BINOMIE, BICVADRATICHE O TRINOMIE.

QUINDI AL COSPETTO DI UNA EQUAZIONE O DISEQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL 2° BISOGNA PRIMA VEDERE SE È BINOMIA, BICVADRATICA O TRINOMIA, ALTRIMENTI VERIFICARE SE SI PUÒ RISCRIVERE MEDIANTE L'UTILIZZO DI PRODOTTI NOTEVOLI O IL RACCOGLIMENTO TOTALE E PARZIALE OPPURE RIDURRE IL SUO GRADO MEDIANTE L'UTILIZZO DELLA DIVISIONE TRA POLINOMI O DELLA REGOLA DI RUFFINI.

PER COMPRENDERE MEGLIO VEDIAMO ALCUNI

ESEMPI EQUAZIONI

$$1] x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$$

NON È BICVADRATICA, NE TRINOMIA O TANTOMENO BINOMIA. NON SEMBRA ESSERCI ALCUN PRODOTTO NOTEVOLE CHE CI PUÒ AIUTARE.

PROVIAMO A SCOMPORRE IL POLINOMIO MEDIANTE RUFFINI

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 9 = -1 + 3 + 3 + 9 = 14 \quad \text{No}$$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 3(1) + 9 = 1 - 3 - 3 + 9 = +4 \quad \text{NO}$$

$$P(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 3(-3) + 9 = -27 - 27 + 9 + 9 = \quad \text{NO}$$

$$P(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 3(3) + 9 = \cancel{27} - \cancel{27} - \cancel{9} + \cancel{9} = 0 \quad \text{SI}$$

| | | | | |
|----|---|----|----|----|
| | 1 | -3 | -3 | +9 |
| +3 | | +3 | 0 | -9 |
| | 1 | 0 | -3 | 0 |

DIVIDIAMO CON RUFFINI
PER IL BINOMIO DIVISORE
 $(x-3)$

$$x^2 + 0 \cdot x - 3$$

QUOZIENTE

COSÌ

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0 \quad \text{LO SCRIVO COME DIVISORE X QUOZIENTE}$$

$$(x-3)(x^2-3) = 0 \quad \text{IL PRODOTTO SI ANNULA SE SI ANNULANO I FATTORI}$$

QUINDI

$$x-3=0 \Rightarrow x=+3$$

$$x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$$2] (x^2-1)(x^2-9)=0$$

IN QUESTO CASO IL PROCEDIMENTO È IMMEDIATO IN QUANTO L'EQUAZIONE SI PRESENTA GIÀ COME PRODOTTO DI DUE FATTORI, QUINDI:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$3] 2x^4 - 5x^3 - 18x^2 + 45x = 0$$

IN QUESTO CASO POSSIAMO IMMEDIATAMENTE RACCOGLIERE LA X PRESENTE IN TUTTI I TERMINI, COSÌ:

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$x(2x^3 - 5x^2 - 18x + 45) = 0$$

E LA PRIMA SOLUZIONE È $x=0$

POI $2x^3 - 5x^2 - 18x + 45 = 0$

TROVIAMO UNO ZERO DEL POLINOMIO IN MODO DA POTERLO SCOMPORRE

$$P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - 18(-1) + 45 = \\ = -2 - 5 + 18 + 45 =$$

No

$$P(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 - 18(1) + 45 = \\ = 2 - 5 - 18 + 45 =$$

No

$$P(-5) = 2(-5)^3 - 5(-5)^2 - 18(-5) + 45 = \\ = -250 - 125 + 90 + 45 = -240$$

No

$$P(5) = 2(5)^3 - 5(5)^2 - 18(5) + 45 = \\ = 250 - 125 - 90 + 45 = 80$$

No

$$P\left(\frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{5}{2}\right) + 45 = \\ = \frac{125}{4} - \frac{125}{4} - \frac{90 \cdot 5}{2} + 45 = -45 + 45 = 0 \quad \text{SI}$$

A QUESTO PUNTO DIVIDIAMO IL POLINOMIO PER $(x - \frac{5}{2})$

| | | | | |
|----------------|---|----|-----|-----|
| | 2 | -5 | -18 | +45 |
| $+\frac{5}{2}$ | | +5 | 0 | -45 |
| | 2 | 0 | -18 | // |

QUINDI

$$2x^3 - 5x^2 - 18x + 45 = \left(x - \frac{5}{2}\right)(2x^2 - 18) = 0$$

CIOÈ:

$$x - \frac{5}{2} = 0$$

$$x = +\frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 = +\frac{18 \cdot 2}{2} = +9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

4) $X^8 - 5X^4 + 4 = 0$ EQUAZIONE TRINOMIA

$$Z = X^4$$

$$Z^2 - 5Z + 4 = 0$$

$$Z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$X^4 = 1$$

$$X = \pm 1$$

$$X^4 = 4$$

$$X = \pm \sqrt[4]{4}$$

5) $(X^2 - 3)^6 + 13(X^2 - 3)^3 + 40 = 0$

PONIAMO $Z = X^2 - 3$ IN MODO CHE SI OTTIENE

$$Z^6 + 13Z^3 + 40 = 0 \quad \text{EQ. TRINOMIA}$$

PONIAMO ANCORA $K = Z^3$ COSÌ

$$K^2 + 13K + 40 = 0$$

$$K_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-13 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-13-3}{2} = -\frac{16}{2} = -8 \\ \frac{-13+3}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

QUINDI

$$Z^3 = -8$$

$$Z = -2$$

$$Z^3 = -5$$

$$Z = -\sqrt[3]{5}$$

ED ANCORA

$$X^2 - 3 = -2$$

$$X^2 = +1$$

$$X = \pm 1$$

$$X^2 - 3 = -\sqrt[3]{5}$$

$$X^2 = 3 - \sqrt[3]{5}$$

$$X = \pm \sqrt{3 - \sqrt[3]{5}}$$

6) $2(X^2 - 1)(X^2 + 3) + 7X = 7X^3$

$$2(X^4 + 3X^2 - X^2 - 3) + 7X - 7X^3 = 0$$

$$2X^4 - 7X^3 + 4X^2 + 7X - 6 = 0$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 7\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{2}\right) - 6 = \\ = \frac{21}{8} - \frac{189}{8} + 9 + \frac{21}{2} - 6 =$$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$= \frac{81 - 189 + 72 + 84 - 48}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

DIVIDIAMO QUINDI PER $(x - \frac{3}{2})$ (POTREMMO FARLO SEMPRE CON RUFFINI)

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{2x^4} - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6 & x - \frac{3}{2} \\
 - \cancel{2x^4} + 3x^3 & \hline
 \hline
 // -4x^3 + 4x^2 + 7x - 6 & 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \\
 + 4x^3 - 6x^2 & \\
 \hline
 // -2x^2 + 7x - 6 & \\
 + 2x^2 - 3x & \\
 \hline
 // +4x - 6 & \\
 - 4x + 6 & \\
 \hline
 // // &
 \end{array}$$

COSÌ

$$(x - \frac{3}{2})(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x = +\frac{3}{2}$$

E

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

| | | | | |
|---|---|----|----|----|
| | 1 | -2 | -1 | +2 |
| 1 | | 1 | -1 | -2 |
| | 1 | -1 | -2 | // |

$$(x-1)(x^2-x-2) = 0$$

$$x-1=0$$

$$x = +1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$7) \frac{x^2 - 3x}{2x} - \frac{x-2}{x-1} = 0 \quad \text{CE: } x \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$\frac{(x^2 - 3x)(x-1) - 2x(x-2)}{2x(x-1)} = 0$$

$$x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + 4x = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 7x = 0$$

$$x(x^2 - 6x + 7) = 0$$

$x = 0$ NON ACCETTABILE PER LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$8) \frac{4}{x^3+1} - \frac{4x^3+3}{x^6-1} = 8 \quad \text{CE: } x^3+1 \neq 0 \quad x \neq -1$$

$$x^6-1 \neq 0 \quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{4}{x^3+1} - \frac{4x^3+3}{(x^3-1)(x^3+1)} - 8 = 0$$

$$\frac{4(x^3-1) - (4x^3+3) - 8(x^6-1)}{x^6-1} = 0$$

$$\cancel{4x^3} - 4 - \cancel{4x^3} - 3 - 8x^6 + 8 = 0$$

$$-8x^6 + 1 = 0$$

$$8x^6 - 1 = 0$$

$$x^6 = \frac{1}{8}$$

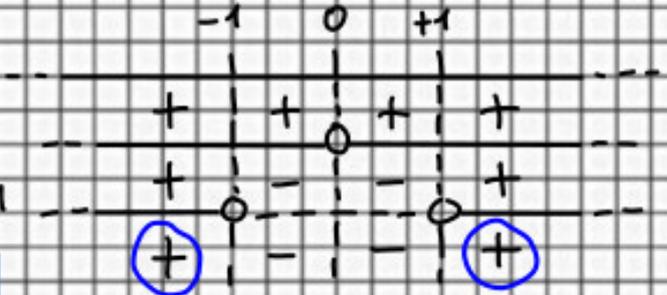
$$x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{8}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ESEMPI DISEQUAZIONI

1) $x^4 - x^2 > 0$
 $x^2(x^2 - 1) > 0$

$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: x \neq 0$
 $x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \cup x > +1$

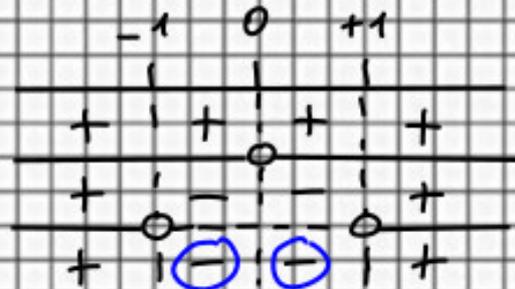
$x < -1 \cup x > +1$



2) $x^2 - x^4 > 0$
 $x^4 - x^2 < 0$
 $x^2(x^2 - 1) < 0$

$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}: x \neq 0$
 $x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \cup x > +1$

$-1 < x < 0 \cup 0 < x < +1$



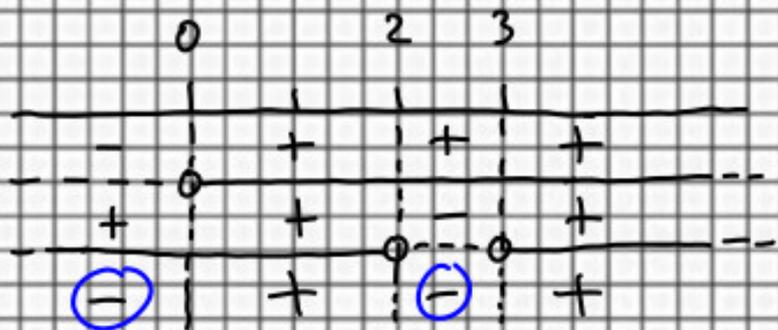
3) $x^3 - 5x^2 + 6x < 0$
 $x(x^2 - 5x + 6) < 0$

$x > 0$
 $x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$x < 2 \cup x > 3$



$x < 0 \cup 2 < x < +3$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

4) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$

$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -1 & +2 \\ -1 & & -1 & +3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & +2 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$

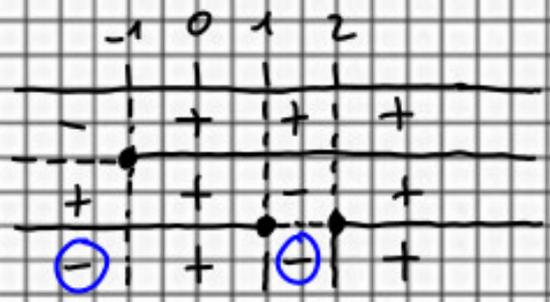
$x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$x \leq 1 \cup x \geq 2$



$x \leq -1 \cup +1 \leq x \leq +2$

5) $x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \leq 0$

$P(-1) = (-1)^5 - 2(-1)^4 + (-1)^3 - 2(-1)^2 - 2(-1) + 4 = 0$ SI
 $= -1 - 2 - 1 - 2 + 2 + 4 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 1 & -2 & +1 & -2 & -2 & +4 \\ -1 & & -1 & +3 & -4 & +6 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & +4 & -6 & +4 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4) \leq 0$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 4(-1)^2 - 6(-1) + 4 =$
 $= +1 + 3 + 4 + 6 + 4 \neq 0$ NO

$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 4 =$
 $= 1 - 3 + 4 - 6 + 4 = 0$ SI

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & +1 & -3 & +4 & -6 & +4 \\
 +1 & & +1 & -2 & +2 & -4 \\
 \hline
 & +1 & -2 & +2 & -4 & 0
 \end{array}$$

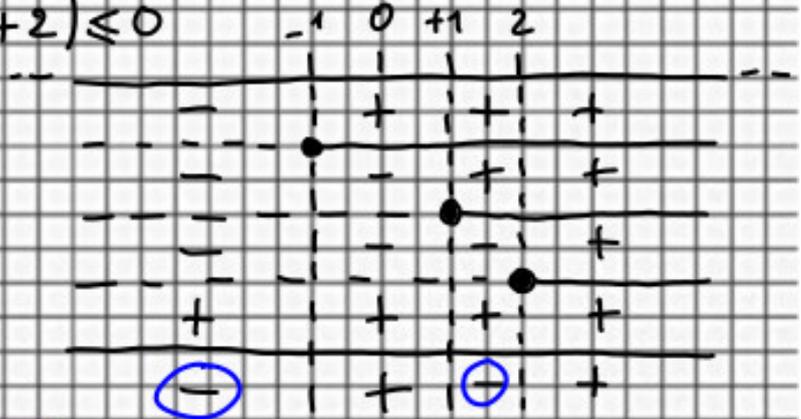
$$(x+1)(x-1)(x^3-2x^2+2x-4) \leq 0$$

$$P(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 2(2) - 4 = 8 - 8 + 4 - 4 = 0 \quad \text{SI}$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & +1 & -2 & +2 & -4 \\
 +2 & & +2 & 0 & +4 \\
 \hline
 & +1 & 0 & +2 & 0
 \end{array}$$

$$(x+1)(x-1)(x-2)(x^2+2) \leq 0$$

$$\begin{array}{ll}
 x+1 \geq 0 & x \geq -1 \\
 x-1 \geq 0 & x \geq +1 \\
 x-2 \geq 0 & x \geq 2 \\
 x^2+2 \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R}
 \end{array}$$



$$x \leq -1 \cup +1 \leq x < +2$$

6] $(x^2-3x-4)(x^2-25) < 0$

$$x^2-3x-4 > 0$$

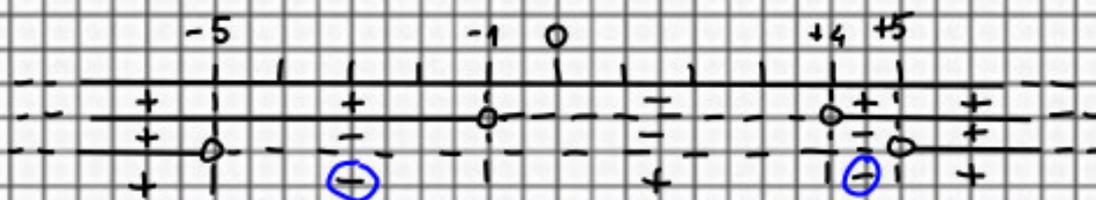
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} -1 \\ +4 \end{array}$$

$$x < -1 \cup x > +4$$

$$x^2-25 > 0$$

$$x^2=25 \quad x = \pm 5$$

$$x < -5 \cup x > +5$$



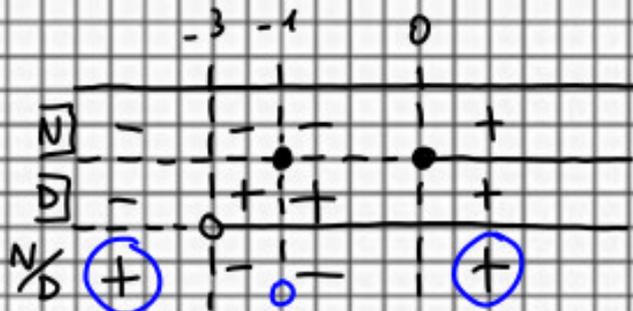
$$-5 < x < -1 \cup +4 < x < +5$$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

7) $\frac{x^3(x+1)^2}{x+3} \geq 0$

CE: $x+3 \neq 0 \quad x \neq -3$

N) $x^3(x+1)^2 \geq 0$
 $x^3 \geq 0 \quad x \geq 0$
 $(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\cup x = -1$



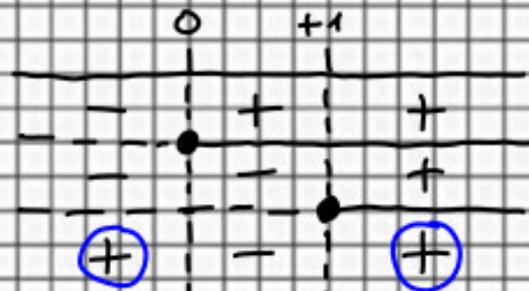
D) $x+3 > 0$
 $x > -3$

$x < -3 \cup x \geq 0 \cup x = -1$

8) $\frac{x^3(x-1)^3}{x+3} \geq 0$

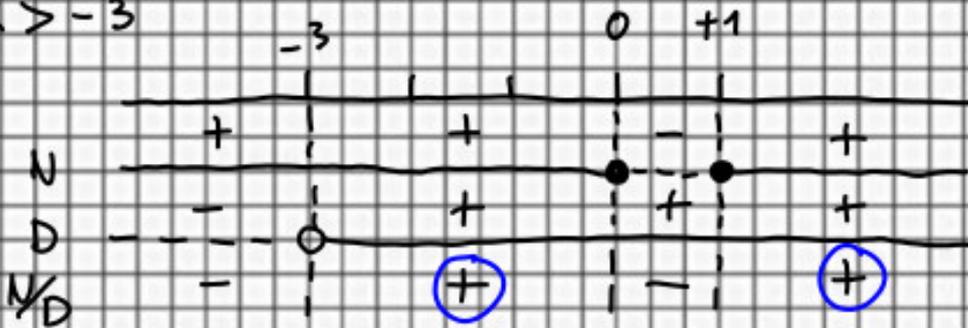
CE: $x+3 \neq 0 \quad x \neq -3$

N) $x^3(x-1)^3 \geq 0$
 $x^3 \geq 0 \quad x \geq 0$
 $(x-1)^3 \geq 0 \quad x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$



$x \leq 0 \cup x \geq 1$

D) $x+3 > 0$
 $x > -3$



$-3 < x \leq 0 \cup x \geq 1$

9) $\frac{1}{x} < \frac{x-1}{x^2+x+1}$

CE: $x \neq 0$

$\frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x} > 0$

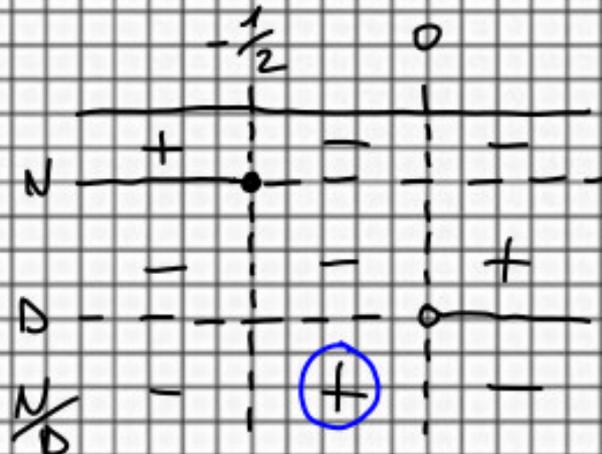
EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$\frac{x(x-1) - x^2 - x - 1}{x(x^2 + x + 1)} > 0$$

$$\frac{-2x - 1}{x(x^2 + x + 1)} > 0$$

N) $-2x - 1 \geq 0 \quad x \leq -\frac{1}{2}$

D) $x(x^2 + x + 1) > 0$
 $x > 0$
 $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$$-\frac{1}{2} < x < 0$$

10) $\frac{x+3}{x-2} < \frac{x-2}{x+3}$

CE: $x-2 \neq 0 \quad \cup \quad x+3 \neq 0$
 $x \neq 2 \quad \cup \quad x \neq -3$

$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} < 0$$

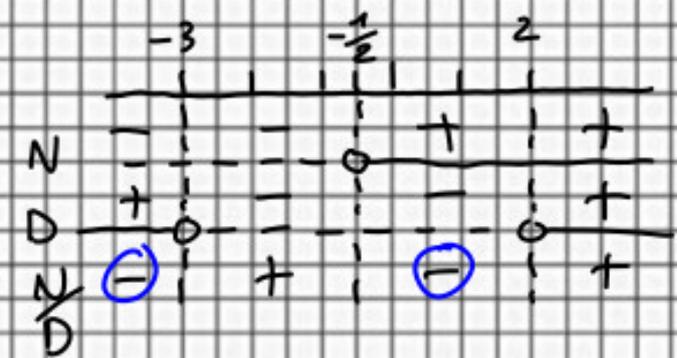
$$\frac{(x+3)^2 - (x-2)^2}{(x-2)(x+3)} < 0$$

$$\frac{\cancel{x^2} + 6x + 9 - \cancel{x^2} + 4x - 4}{(x-2)(x+3)} < 0$$

$$\frac{10x + 5}{(x-2)(x+3)} < 0$$

N) $10x + 5 > 0 \quad x > -\frac{1}{2}$

D) $(x-2)(x+3) > 0$
 $x-2 > 0 \quad x > 2 \quad \cup \quad x < -3$
 $x+3 > 0 \quad x > -3 \quad \cup \quad x > 2$



$$x < -3 \quad \cup \quad -\frac{1}{2} < x < 2$$

EQUAZIONI DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

$$11) \quad x^3(x^2-1) - 2x(x^2+14) < 0$$

$$x^5 - x^3 - 2x^3 - 28x < 0$$

$$x^5 - 3x^3 - 28x < 0$$

$$x(x^4 - 3x^2 - 28) < 0$$

$$x < 0 \quad (1)$$

$$x^4 - 3x^2 - 28 < 0$$

$$z = x^2$$

$$z^2 - 3z - 28 < 0$$

$$z^2 - 3z - 28 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm 11}{2} = \begin{cases} \frac{-8}{2} = -4 \\ \frac{14}{2} = 7 \end{cases}$$

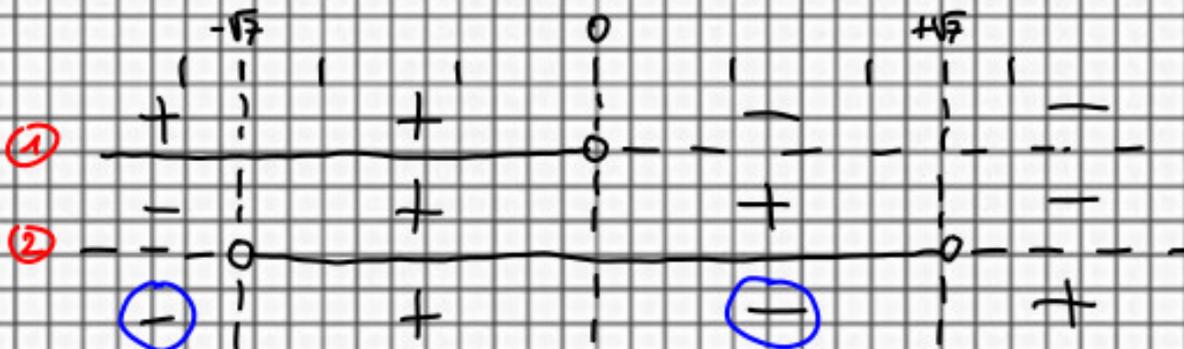
$$-4 < z < 7$$

$$-4 < x^2 < 7$$

$$x^2 > -4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 < 7$$

$$x = \pm\sqrt{7} \quad -\sqrt{7} < x < +\sqrt{7} \quad (2)$$



$$x < -\sqrt{7} \quad \cup \quad 0 < x < +\sqrt{7}$$