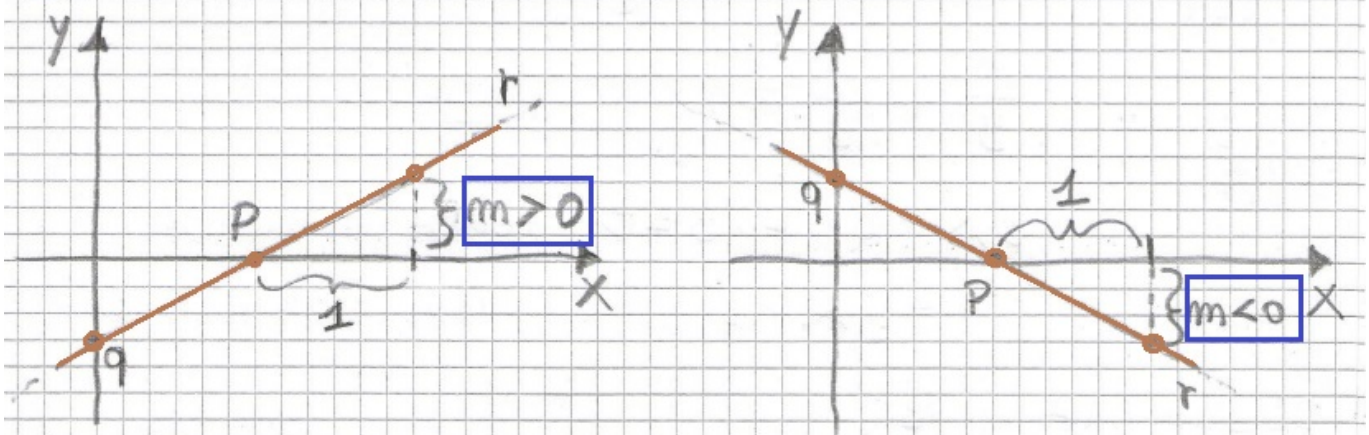
LA TEORIA SULLA RETTA

LA RETTA

(11)

L'ENTE GEOMETRICO FONDAMENTALE DENOMINATO RETTA, IN GENERALE È UN INSIEME INFINITO DI PUNTI ALLINEATI NEL PIANO O NELLO SPAZIO.
NEL PIANO CARTESIANO VIENE RAPPRESENTATA ALGEBRICAMENTE DA UN'EQUAZIONE CON DUE CARATTERISTICHE FONDAMENTALI, IL COEFFICIENTE ANGOLARE E L'ORDINATA ALL'ORIGINE O INTERCETTA (COMUNEMENTE DETTO TERMINE NOTO DELL'EQUAZIONE). DISEGNATO NEL PIANO CARTESIANO UNA RETTA "r" CHE PASSA PER ENTRAMBI GLI ASSI NEL PUNTO "p" (SU X) E NEL PUNTO "q" (SU Y):



L'EQUAZIONE ALGEBRICA CHE LA RAPPRESENTA PUÒ ESSERE DI TRE FORME DIVERSE:

1) FORMA IMPLICITA

$$aX + bY + c = 0$$

2) FORMA ESPLICITA

$$Y = mX + q$$

DOVE

$m = -\frac{a}{b}$ COEFFICIENTE ANGOLARE

$q = -\frac{c}{b}$ TERMINE NOTO O INTERCETTA

3) FORMA SEGMENTARIA (SOLO SE LA RETTA TOCCA ENTRAMBI GLI ASSI)

$$\frac{X}{p} + \frac{Y}{q} = 1$$

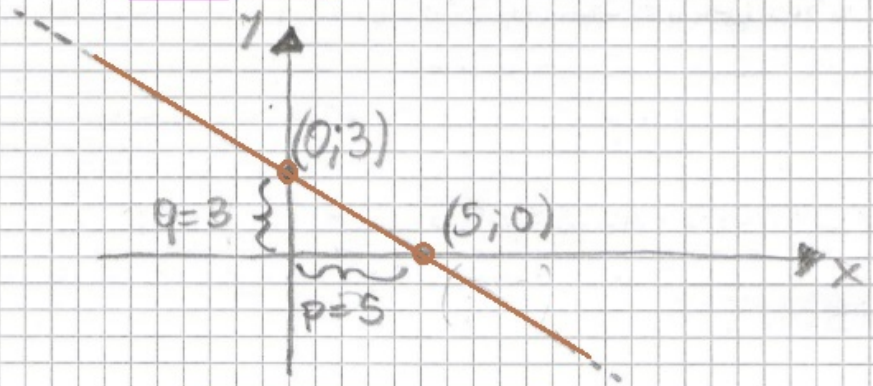
LA TEORIA SULLA RETTA

DOVE

p PUNTO D'INTERSEZIONE TRA LA RETTA E L'ASSE X

q PUNTO D'INTERSEZIONE TRA LA RETTA E L'ASSE Y

CIOÈ AD ESEMPIO:



$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

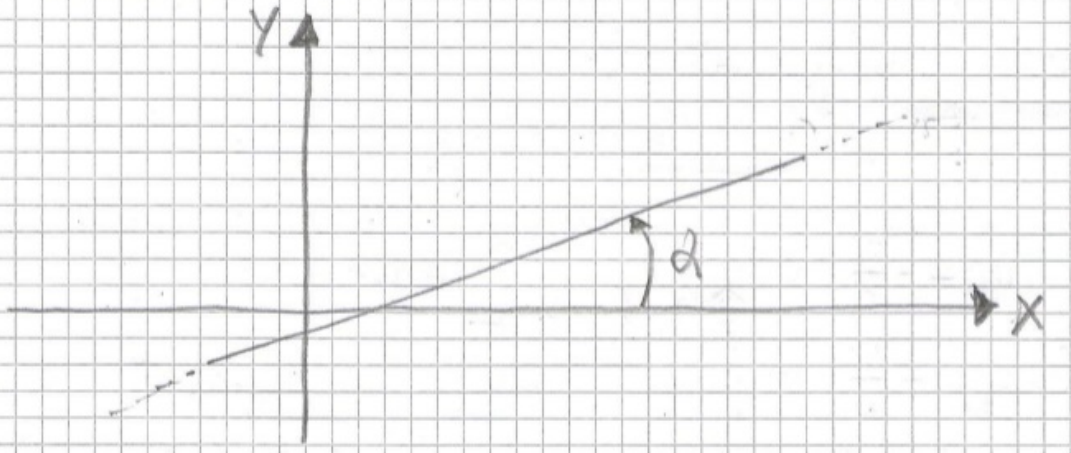
CIOÈ

$$3x + 5y - 15 = 0$$ FORMA IMPLICITA

$$y = -\frac{3}{5}x + 3$$ FORMA ESPLICITA

OSSERVAZIONE:

IN GENERALE SI DICE CHE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA MISURA L'INCLINAZIONE (O PENDENZA) DELLA RETTA, PERCHÈ È LA MISURA DELLA TANGENTE DELL'ANGOLO "α" (ALFA) CHE LA RETTA FORMA CON L'ASSE DELLE ASCISSE(X), CIOÈ:



$m = \tan(\alpha)$ PER $-90° < \alpha < +90°$

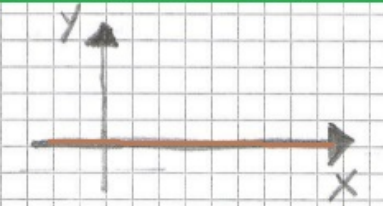
COSÍ SE LA RETTA È VERTICALE, CIOÈ PARALLELA ALL'ASSE Y, SI DICE CHE LA SUA PENDENZA È INFINITA, CIOÈ

$m = +\infty$ PERCHÉ $\alpha = 90°$ E $\tan(90°) = \pm\infty$

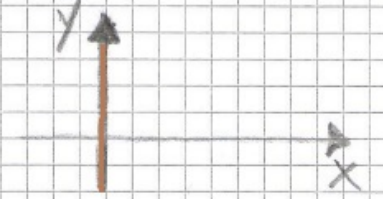
MENTRE SE LA RETTA È ORIZZONTALE, CIOÈ PARALLELA ALL'ASSE X,

$m = 0$ PERCHÉ $\alpha = 0$ E $\tan(0) = 0$

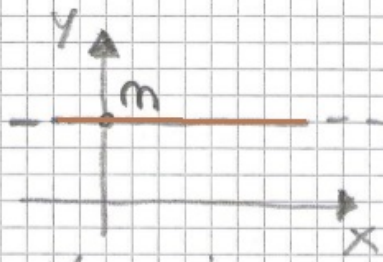
RETTE PARTICOLARI



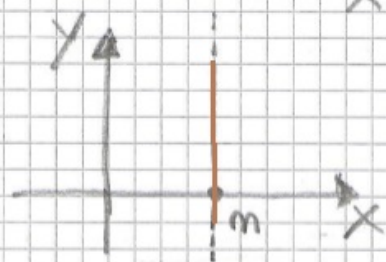
$y = 0$ COINCIDENTE CON L'ASSE X



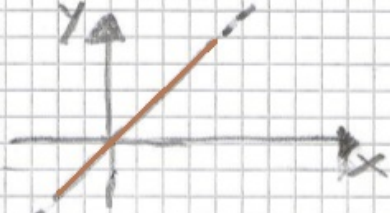
$x = 0$ COINCIDENTE CON L'ASSE Y



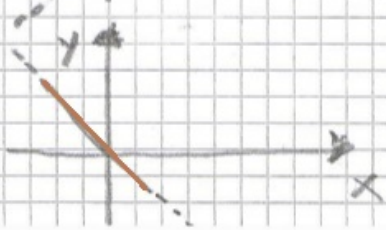
$y = m$ PARALLELA ALL'ASSE X



$x = m$ PARALLELA ALL'ASSE Y



$y = x$ BISETTRICE DEL I E III QUADRANTE



$y = -x$ BISETTRICE DEL II E IV QUADRANTE

LA TEORIA SULLA RETTA

SAPENDO CHE PER DUE PUNTI PASSA UNA ED UNA SOLA RETTA, PER DISEGNARE UNA RETTA BASTA TROVARE LE COORDINATE DI ALMENO DUE SUOI PUNTI E CONGIUNGERLI. LE COORDINATE DI UN PUNTO DI UNA RETTA SI TROVANO ASSEGNANDO ALLA X UN VALORE A PIACERE E CALCOLANDO IL CORRISPONDENTE VALORE DI Y TRAMITE L'EQUAZIONE ALGEBRICA DELLA RETTA. AD ESEMPIO SE ABBIAMO LA RETTA RAPPRESENTATA DALL'EQUAZIONE

$$y = 2x - 1$$

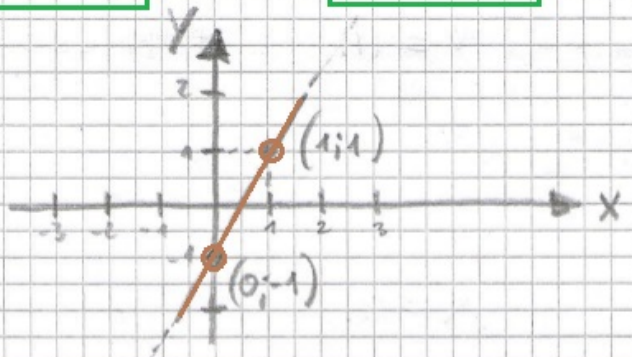
MEDIANTE IL COSIDDETTO METODO TABELLARE, SI AVRÀ:

X	$Y=2X-1$	Y
0	$Y=2\cdot 0-1$	-1
1	$Y=2\cdot(1)-1$	1

CIOÈ LA RETTA PASSA PER I PUNTI DI COORDINATE

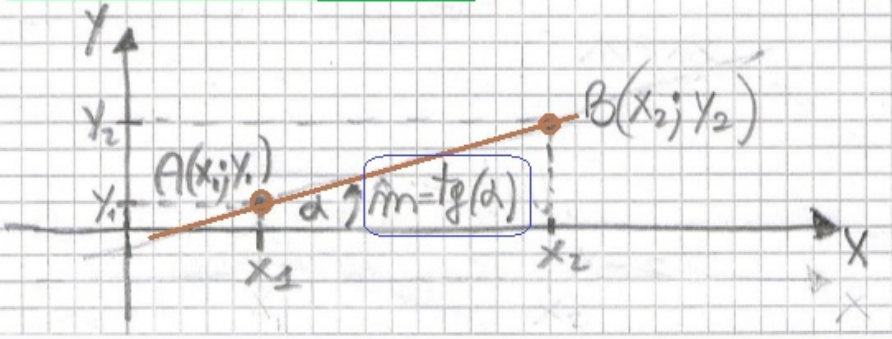
$(0;-1)$ e $(1;1)$

COSÌ:



RICERCA DELL'EQUAZIONE DI UNA RETTA

DATI DUE PUNTI A e B NEL PIANO



DI COORDINATE GENERICHE

$A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$

LA FORMULA PER TROVARE L'UNICA RETTA PASSANTE PER TALI PUNTI È:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

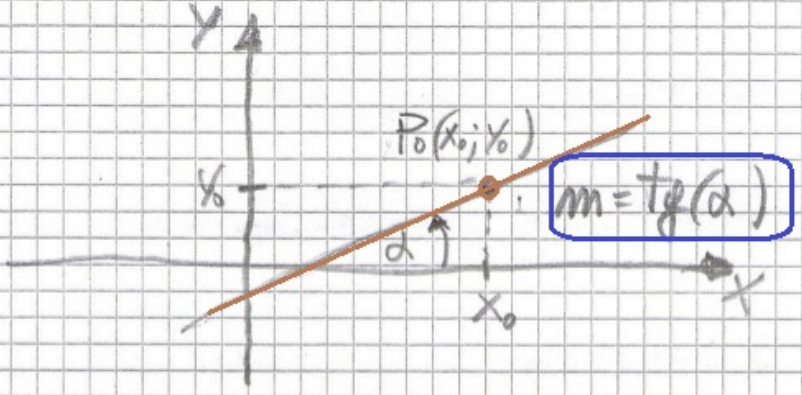
RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

MENTRE SE SI VUOLE DETERMINARE DIRETTAMENTE IL COEFFICIENTE ANGOLARE SENZA DETERMINARE LA RETTA:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

DATO INVECE UN PUNTO P NEL PIANO ED IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA PASSANTE PER ESSO

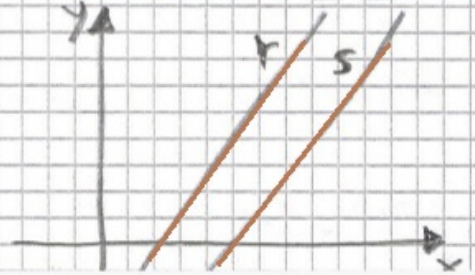


SI HA

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

RETTA PER UN PUNTO CON COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO

RETTE PARALLELE

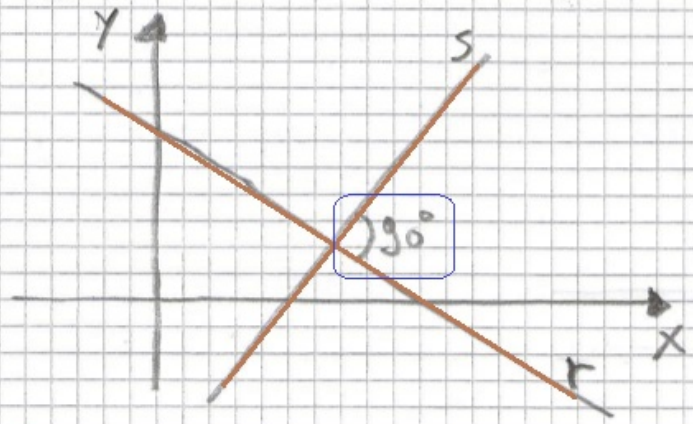


DUE RETTE r ED s SI DICONO PARALLELE SE HANNO LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE, CIOÈ

$$m_r = m_s$$

LA TEORIA SULLA RETTA

RETTE PERPENDICOLARI



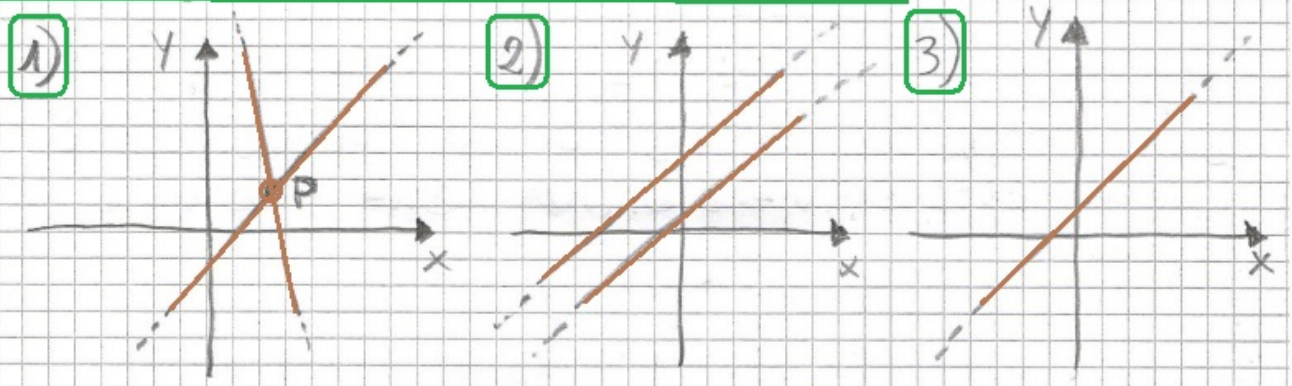
DUE RETTE SI DICONO PERPENDICOLARI SE HANNO I COEFFICIENTI ANGOLARI OPPOSTI E RECIPROCI, CIOÈ

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

(ANTIRECIPROCI)

INTERSEZIONE DI DUE RETTE

CONSIDERANDO 2 RETTE SUL PIANO CARTESIANO, QUESTE POSSONO DISPORSI IN TRE MODI DIVERSI



INCIDENTI PARALLELE COINCIDENTI

1) INCIDENTI
SONO 2 RETTE CHE SI INCONTRANO IN UN PUNTO P

2) PARALLELE
SONO 2 RETTE CHE NON SI INCONTRANO MAI (NON HANNO PUNTI IN COMUNE)

3) COINCIDENTI
SONO RETTE CHE HANNO TUTTI I PUNTI IN COMUNE (UNA SOVRAPPOSTA ALL'ALTRA)

PER DETERMINARE LE COORDINATE DEL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$ DI INTERSEZIONE DI 2 RETTE INCIDENTI

r: $y = m_r x + q_r$ s: $y = m_s x + q_s$

a) SI METTONO A SISTEMA LE EQUAZIONI DELLE 2 RETTE

$$\begin{cases} y = m_r x + q_r \\ y = m_s x + q_s \end{cases}$$

b) SI RISOLVE IL SISTEMA (VEDASI TEORIA SUI SISTEMI LINEARI)

c) LE SOLUZIONI x_0, y_0 DEL SISTEMA SONO LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 RETTE.

APPARTENENZA DI UN PUNTO AD UNA RETTA

PER VERIFICARE SE UN PUNTO $P_0(x_0; y_0)$ APPARTIENE AD UNA RETTA:

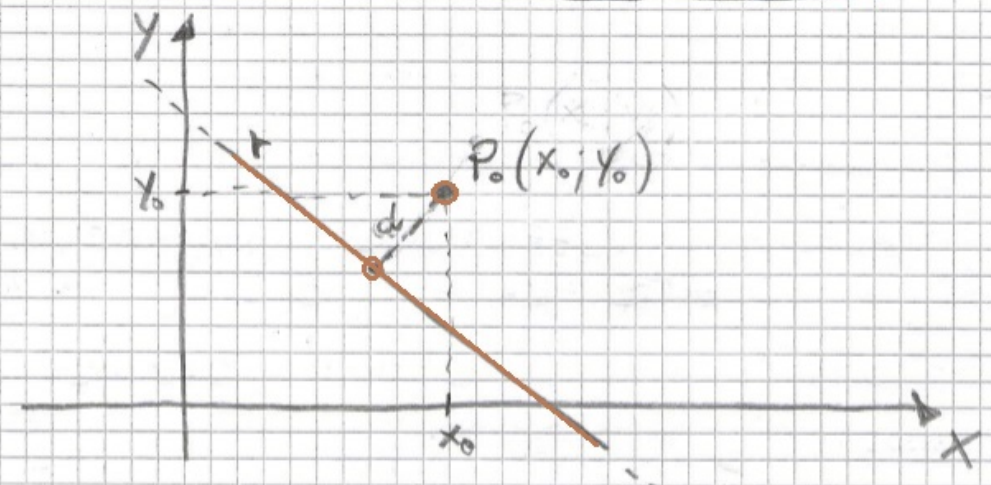
a) SI SOSTITUISCONO LE COORDINATE x_0, y_0 DEL PUNTO ALLA x ED ALLA y NELL'EQUAZIONE DELLA RETTA, CIOÈ

$$y_0 = m x_0 + q$$

b) SI SVILUPPANO I CALCOLI

c) SE SI OTTIENE UNA IDENTITÀ, IL PUNTO APPARTIENE ALLA RETTA

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA



DATO UN PUNTO P_0 DI COORDINATE x_0, y_0 ED UNA RETTA r NEL PIANO, SI HA:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN FORMA IMPLICITA

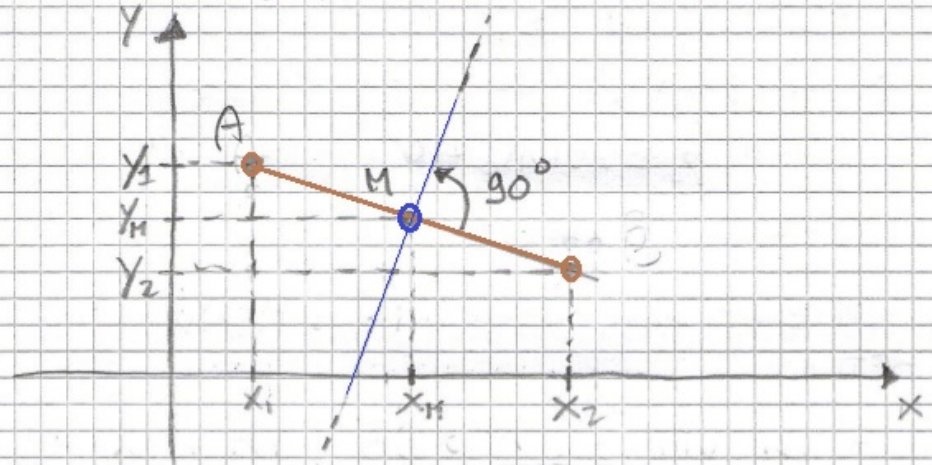
$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA IN FORMA ESPLICITA

DOVE IL NUMERATORE È POSTO IN VALORE ASSOLUTO IN QUANTO UNA DISTANZA NON PUÓ ASSUMERE VALORE NEGATIVO.

ASSE DI UN SEGMENTO

DATI 2 PUNTI $A(x_1; y_1)$ E $B(x_2; y_2)$ NEL PIANO CARTESIANO



PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DELL'ASSE DEL SEGMENTO $\overline{AB}$:

a) SI CALCOLA IL PUNTO MEDIO $M(x_M; y_M)$

b) SI CALCOLA IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DELLA RETTA PASSANTE PER A e B.

c) SI CONSIDERA COME COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE m_{ASSE} L'ANTIRECIPROCO DI QUELLO DELLA RETTA, CIOÉ

$$m_{ASSE} = -\frac{1}{m}$$

d) SI DETERMINA LA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO M E COEFFICIENTE ANGOLARE m_{ASSE}

BISETTRICI DEGLI ANGOLI FORMATI DA 2 RETTE NON-PARALLELE (3)

DATE LE EQUAZIONI DI 2 RETTE NON PARALLELE IN FORMA IMPLICITA r e s:

r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

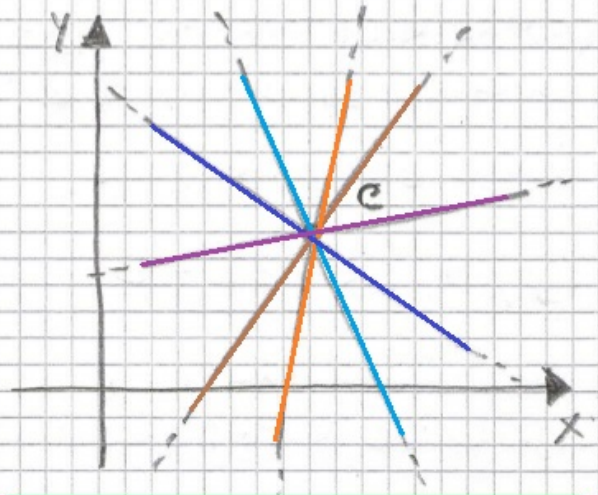
L'EQUAZIONE DELLE BISETTRICI DEGLI ANGOLI FORMATI DA r E s È:

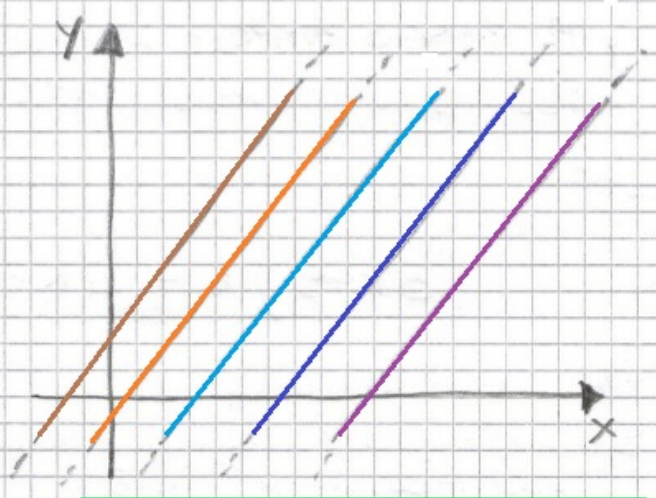
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

FASCI DI RETTE

(4)

UN FASCIO DI RETTE È UN INSIEME DI RETTE NEL PIANO CHE HANNO IN COMUNE UN PUNTO O UNA DIREZIONE





SE HANNO UN PUNTO C IN COMUNE DETTO CENTRO DEL FASCIO, SI DICE

FASCIO PROPRIO

SE HANNO LA STESSA DIREZIONE CIOÉ STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE, SI DICE

FASCIO IMPROPRIO

L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI RETTE IN GENERALE SI PRESENTA IN FORMA IMPLICITA (COME PER LA RETTA) E IN ESSA OLTRE ALLE INCOGNITE X e Y VI È ALMENO UNA VOLTA UN'ALTRA LETTERA (GENERALMENTE K), DETTA PARAMETRO,

I) $2X+3KY+K=0$ II) $3X-Y+K=0$

PER CLASSIFICARE UN FASCIO DI RETTE BISOGNA CALCOLARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE

$$m=-\frac{a}{b}$$

SE m CONTIENE IL PARAMETRO K IL FASCIO È PROPRIO ALTRIMENTI SE IN m IL PARAMETRO K SI SEMPLIFICA, IL FASCIO È IMPROPRIO:

$m_I=-\frac{2}{3K}$ (PROPRIO)

$m_{II}=3$ (IMPROPRIO)

LA TEORIA SULLA RETTA

RETTE GENERATRICI DI UN FASCIO

LE RETTE GENERATRICI SONO LE 2 RETTE CHE DANNO ORIGINE AL FASCIO:

- NEL FASCIO PROPRIO LE RETTE GENERATRICI SONO INCIDENTI
- NEL FASCIO IMPROPRIO LE RETTE GENERATRICI SONO PARALLELE

DATA L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI RETTE,

$$(3k+5)X-(4k+12)Y+4k+12=0$$

PER DETERMINARE LE SUE 2 RETTE GENERATRICI, SI SVILUPPANO I CALCOLI RACCOGLIENDO A FATTOR COMUNE IL PARAMETRO K, CIOÈ:

$$3kX+5X-4kY-12Y+4k+12=0$$

$$k(3X-4Y+4)+5X-12Y+12=0$$

($3X-4Y+4$: I^a RETTA; $5X-12Y+12$: II^a RETTA)

RICERCA DEL CENTRO DI UN FASCIO DI RETTE PROPRIO

SI DETERMINANO LE 2 RETTE GENERATRICI, r e s, SI METTONO A SISTEMA, E LE SOLUZIONI DEL SISTEMA RAPPRESENTANO LE COORDINATE DEL CENTRO DEL FASCIO

$$C(x_0, y_0)$$

SCRIVERE L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI RETTE

1) PARTENDO DALLE 2 RETTE GENERATRICI r e s, SI SCRIVE

$$k \cdot r + s = 0$$

E SI SVILUPPANO I CALCOLI.

2) NOTO IL CENTRO $C(x_0; y_0)$ DI UN FASCIO DI RETTE PROPRIO

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

3) NOTO IL COEFFICIENTE ANGOLARE m DI UN FASCIO DI RETTE IMPROPRIO

$$y=mx+k$$

LA TEORIA SULLA RETTA

ESEMPIO

DATI I PUNTI $A(\underset{x_1}{2};\underset{y_1}{3})$ e $B(\underset{x_2}{4};\underset{y_2}{5})$

DETERMINIAMO IL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO $\overline{AB}$

$$M(x_M; y_M)$$

DOVE

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

CIOÈ

$$x_M = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad y_M = \frac{3+5}{2} = 4$$

QUINDI

$$M(3;4)$$

A QUESTO PUNTO SAPPIAMO CHE L'ASSE DI $\overline{AB}$ È LA RETTA PERPENDICOLARE AL SEGMENTO $\overline{AB}$ CHE PASSA PER IL SU PUNTO MEDIO.

TROVIAMO QUINDI L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER A E B E L'ANTIRECIPROCO DEL SUO COEFFICIENTE ANGOLARE SARÀ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE DI $\overline{AB}$.

COSÌ... CONSIDERANDO LA FORMULA DELLA RETTA PER 2 PUNTI:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

CIOÈ

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-2}{4-2}$$

$$\frac{y-3}{2} = \frac{x-2}{2}$$

MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER 2

$$2 \cdot \frac{y-3}{2} = \frac{x-2}{2} \cdot 2$$

$$y - 3 = x - 2$$

$$y = x + 3 - 2$$

QUINDI $y = x + 1$

DOVE IL COEFFICIENTE ANGOLARE È

$m = 1$

MENTRE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE DI $\overline{AB}$ È IL SUO ANTIRECIPROCO, CIOÈ:

$$m_{ASSE} = -\frac{1}{m}$$

CIOÈ

$$m_{ASSE} = -\frac{1}{1} = -1$$

A QUESTO PUNTO, ABBIAMO IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELL'ASSE, SAPPIAMO CHE PASSA PER IL PUNTO MEDIO M, E SFRUTTIAMO LA FORMULA DELLA RETTA PER UN PUNTO CON COEFFICIENTE ANGOLARE ASSEGNATO, CIOÈ:

$$M\left(\underset{x_0}{3}; \underset{y_0}{4}\right)$$

COSÌ

$$y - y_0 = m_{ASSE}(x - x_0)$$

$$y - 4 = -1 \cdot (x - 3)$$

$$y - 4 = -x + 3$$

$$y = -x + 4 + 3$$

$$y = -x + 7$$

È L'EQUAZIONE DELL'ASSE DEL SEGMENTO $\overline{AB}$.