SISTEMI LINEARI SISTEMI DI 1° GRADO

(1)

IN GENERALE UN SISTEMA LINEARE È UN SISTEMA FORMATO DA 2 O PIÙ EQUAZIONI DI 1° GRADO IN PIÙ INCOGNITE, NELLE QUALI OGNI INCOGNITA COMPARE CON ESPONENTE PARI AD 1.

VISTO CHE PER CALCOLARE IL GRADO DI UN SISTEMA BASTA MOLTIPLICARE I GRADI DELLE EQUAZIONI CHE LO COMPONGONO ALLORA IL GRADO DI QUESTI SISTEMI È 1 (PERCHÉ $1*1*1*\dots*1=1$), DA QUESTO IL NOME DI **SISTEMA LINEARE**.

CONSIDERANDO I 2 SEMPLICI CASI:

1) UN NUMERO DI EQUAZIONI UGUALE AL NUMERO DI INCOGNITE
2) UN BASSO NUMERO DI INCOGNITE

ALLORA POSSIAMO PARLARE DI:

- SISTEMI 2×2 (2 EQUAZIONI IN 2 INCOGNITE)

INDICATI GENERALMENTE NELLA FORMA

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

DOVE a e b SONO I COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE, MENTRE c I TERMINI NOTI, NELLE 2 EQUAZIONI.

- SISTEMI 3×3 (3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

DOVE a, b, c SONO I COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE, MENTRE d I TERMINI NOTI, NELLE 3 EQUAZIONI.

OSSERVAZIONE:

GEOMETRICAMENTE OGNI EQUAZIONE LINEARE (CIOÈ DI 1° GRADO) RAPPRESENTA UNA RETTA. LE DIMENSIONI DEL LUOGO GEOMETRICO IN CUI SI TROVA TALE RETTA È DATO PROPRIO DAL NUMERO DI INCOGNITE IN ESSA PRESENTI. CIOÈ:

EQUAZIONE DI 1° GRADO IN 2 INCOGNITE (RETTA) $\Longrightarrow$ LUOGO IN 2 DIMENSIONI (PIANO CARTESIANO)

EQUAZIONE DI 1° GRADO IN 3 INCOGNITE (RETTA) $\Longrightarrow$ LUOGO IN 3 DIMENSIONI (SPAZIO)

SAPENDO CHE PER 2 PUNTI PASSA UNA ED UNA SOLA RETTA (SIA NEL PIANO CHE NELLO SPAZIO), E RICORDANDO CHE NEL PIANO (2 DIMENSIONI) OGNI PUNTO È INDICATO CON UNA COPPIA DI VALORI $(x; y)$, MENTRE NELLO SPAZIO (3 DIMENSIONI), OGNI PUNTO È INDICATO CON UNA TRIPLA DI VALORI $(x; y; z)$, ALLORA CONOSCENDO 2 PUNTI PER I QUALI PASSA POSSIAMO DISEGNARE UNA RETTA.

CONSIDERIAMO AD ESEMPIO L'EQUAZIONE

$$\boxed{y = 3x}$$

EQUAZIONE DI 1° GRADO (LINEARE) IN 2 INCOGNITE, SAPPIAMO QUINDI CHE ESSA RAPPRESENTA UNA RETTA NEL PIANO CARTESIANO.
CONSIDERIAMO I VALORI DI x $(-1; 2)$ E TROVIAMO

2 PUNTI (PER I QUALI PASSA LA RETTA) MEDIANTE LA TABELLA SEGUENTE

x	$y = 3x$
-1	$y = 3\cdot(-1) = -3$
2	$y = 3\cdot(2) = 6$

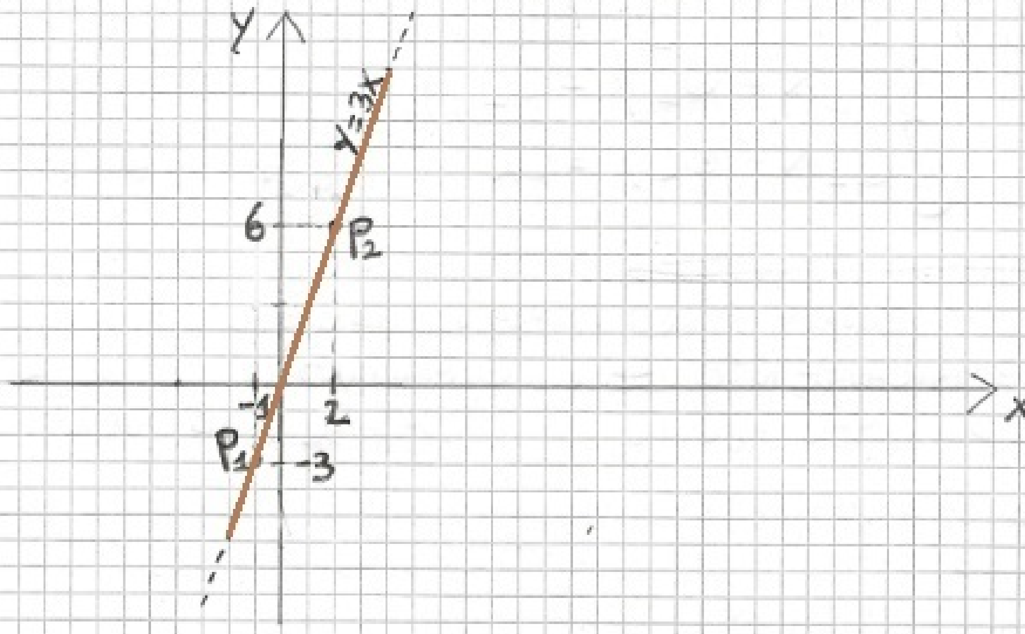
CIOÈ

x	y
-1	-3
2	6

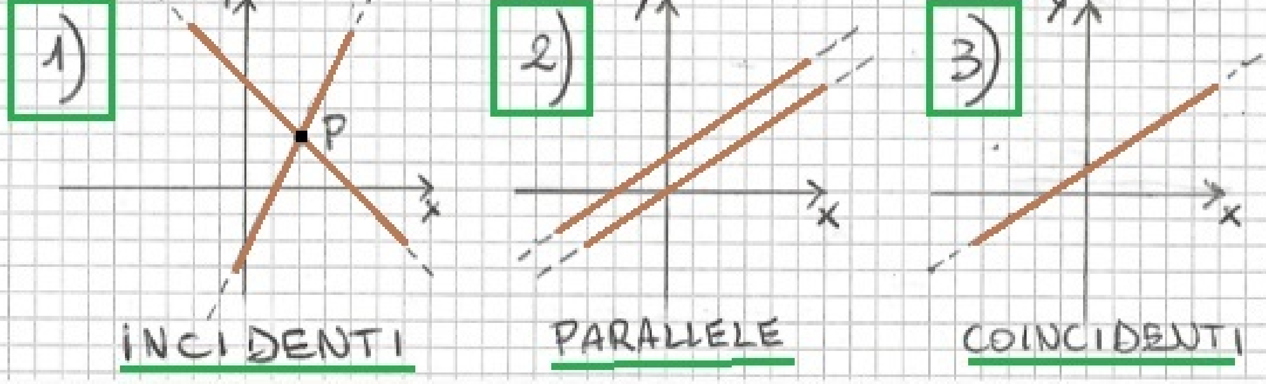
I 2 PUNTI PER I QUALI PASSA LA RETTA SONO

$$P_1(-1;3) \quad P_2(2;6)$$

POSSIAMO COSÌ DISEGNARE LA RETTA



CONSIDERANDO 2 RETTE SUL PIANO CARTESIANO, CIOÈ 2 EQUAZIONI DI 1° GRADO (LINEARI) IN DUE INCOGNITE, ESSE POSSO DISPORSI IN TRE MODI DIVERSI:



INCIDENTI PARALLELE COINCIDENTI

1) INCIDENTI
SONO 2 RETTE CHE SI INCONTRANO IN 1 PUNTO

2) PARALLELE
SONO 2 RETTE CHE NON SI INCONTRANO MAI (NON HANNO PUNTI IN COMUNE)

3) COINCIDENTI
SONO RETTE CHE HANNO TUTTI I PUNTI IN COMUNE (UNA SOVRAPPOSTA ALL'ALTRA)

CONSIDERIAMO ADESSO LA FORMA GENERICA DI UN SISTEMA 2x2 (CIOÈ 2 EQUAZIONI LINEARI IN 2 INCOGNITE):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

TALE SISTEMA QUINDI DARÀ DELLE SOLUZIONI, CHE GEOMETRICAMENTE CI DIRANNO COME LE 2 RETTE CHE LO COMPONGONO, SI DISPONGONO NEL PIANO.

DAL SISTEMA POSSIAMO ANCHE SCRIVERE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE, CIOÈ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

DELLA QUALE SE NE PUÒ CALCOLARE IL DETERMINANTE CHE È:

$$\boxed{D = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_2}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

(2)

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI È:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

IL CUI DETERMINANTE È

$$\boxed{D = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -1 - 3 = -4}$$

IN CONCLUSIONE ALLORA POSSIAMO DIRE CHE, DATO UN SISTEMA LINEARE, ESSO SARÀ:

A) DETERMINATO

CIOÈ CHE AMMETTE UNA SOLUZIONE E GEOMETRICAMENTE SIGNIFICA CHE LE RETTE SONO INCIDENTI E QUINDI SI INCONTRANO IN UN PUNTO CHE È LA SOLUZIONE DEL SISTEMA.
IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È DIVERSO DA ZERO

$$\boxed{D \neq 0}$$

E I RAPPORTI DEI COEFFICIENTI SONO DIVERSI

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

B) INDETERMINATO

CIOÈ CHE AMMETTE INFINITE SOLUZIONI E GEOMETRICAMENTE LE RETTE SONO COINCIDENTI, HANNO INFINITI PUNTI IN COMUNE CHE SONO LA SOLUZIONE DEL SISTEMA
IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È UGUALE A ZERO

$$\boxed{D = 0}$$

E I RAPPORTI DEI COEFFICIENTI SONO UGUALI

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

C| IMPOSSIBILE

CIOÈ CHE NON AMMETTE SOLUZIONI E GEOMETRICAMENTE LE RETTE SONO PARALLELE.
IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È UGUALE A ZERO

$$\boxed{D = 0}$$

E I RAPPORTI DEI COEFFICIENTI SONO UGUALI MA DIVERSI DA QUELLO DEI TERMINI NOTI:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

ESEMPIO:

DATO IL SEGUENTE SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

STABILIRE SE È DETERMINATO.

PER PRIMA COSA, MEDIANTE SEMPLICI PASSAGGI ALGEBRICI, TRASFORMIAMO IL SISTEMA NELLA COSIDDETTA FORMA NORMALE (GENERALE)

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

SCRIVIAMO QUINDI LA MATRICE DEI COEFFICIENTI; E CALCOLIAMO IL SUO DETERMINANTE:

$$\boxed{D \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -5}$$

VISTO CHE $D \neq 0$ POSSIAMO GIÀ DIRE CHE IL SISTEMA È DETERMINATO, COSA CHE POSSIAMO VERIFICARE ANCHE MEDIANTE I RAPPORTI DEI COEFFICIENTI:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

CIOÈ

$$\boxed{\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}}$$

METODI DI RISOLUZIONE

PER DETERMINARE LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE ESISTONO DIVERSI METODI, COME:

- METODO PER SOSTITUZIONE
- METODO PER CONFRONTO
- METODO PER RIDUZIONE
- METODO DI CRAMER

– METODO PER SOSTITUZIONE

DATO UN SISTEMA LINEARE IN FORMA NORMALE (GENERALE), QUESTO METODO PREVEDE DI:

1) ISOLARE UN'INCOGNITA* IN UN'EQUAZIONE, IN MODO DA OTTENERE UN'ESPRESSIONE CHE DIPENDE DALLE ALTRE INCOGNITE;
2) SOSTITUIRE L'ESPRESSIONE NELLE ALTRE EQUAZIONI IN MODO DA ELIMINARE L'INCOGNITA* ISOLATA PRIMA;
3) RIPETERE IL PROCEDIMENTO FINO A CHE NON RIMANE UN'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA, E RISOLVERLA.
4) SOSTITUIRE IL VALORE TROVATO DELL'INCOGNITA NELLE ALTRE EQUAZIONI FINO A DETERMINARE IL VALORE DELLE ALTRE INCOGNITE.

ESEMPIO

CONSIDERIAMO SEMPRE IL SISTEMA

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

DAL CALCOLO DEL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI FATTO IN PRECEDENZA SAPPIAMO CHE SI TRATTA DI UN SISTEMA DETERMINATO, CIOÈ AMMETTE UNA SOLUZIONE.

TROVIAMO TALE SOLUZIONE MEDIANTE IL METODO PER SOSTITUZIONE:

1) PASSO 1, ISOLIAMO UN'INCOGNITA:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO ABBIAMO ISOLATO LA X NELLA PRIMA EQUAZIONE

2) PASSO 2, SOSTITUIAMO L'ESPRESSIONE DELL'INCOGNITA NELLE ALTRE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} x=6-y \\ 3(6-y)-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y \\ 18-3y-2y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6-y \\ +18-5y=-2 \end{cases}$$

OTTENENDO UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO IN UNA INCOGNITA (Y)

3) PASSO 3, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DI 1° GRADO E TROVIAMO IL VALORE DI Y:

$$\begin{cases} x=6-y \\ -5y=-2-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y \\ -5y=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y \\ \frac{-5y}{-5}=\frac{-20}{-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y \\ y=4 \end{cases}$$

4) PASSO 4, SOSTITUIAMO IL VALORE TROVATO NELLE ALTRE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} x=6-(4) \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(2;4)\ \text{SOLUZIONE}}$$

QUINDI LE 2 RETTE DEL SISTEMA SONO INCIDENTI (SI TOCCANO) NEL PUNTO $P(2;4)$.

-METODO PER CONFRONTO

3

DATO UN SISTEMA LINEARE IN FORMA NORMALE, QUESTO METODO PREVEDE DI:

1) RISCRIVERE TUTTE LE EQUAZIONI ISOLANDO LA STESSA INCOGNITA

2) SOSTITUIRE L'ESPRESSIONE DELL'INCOGNITA OTTENUTA DA UNA DELLE EQUAZIONI, IN TUTTE LE ALTRE

3) TRALASCIARE MOMENTANEAMENTE L'EQUAZIONE (DALLA QUALE SI È PRESA L'ESPRESSIONE DELL'INCOGNITA) E RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE RIMANENTE CHE AVRÀ UN'EQUAZIONE E UN'INCOGNITA IN MENO

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO SEMPRE IL SISTEMA

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$$

1) PASSO 1, ISOLIAMO LA STESSA INCOGNITA IN ENTRAMBE LE EQUAZIONI, LA X:

$$\begin{cases} x=6-y \\ 3x=2y-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6-y \\ x=\frac{2}{3}y-\frac{2}{3} \end{cases}$$

2) PASSO 2, SOSTITUIAMO L'ESPRESSIONE DELLA X TROVATA NELLA SECONDA EQUAZIONE, NELLA PRIMA EQUAZIONE:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y-\frac{2}{3}=6-y \\ x=\frac{2}{3}y-\frac{2}{3} \end{cases}$$

3) CONSIDERIAMO SOLO LA PRIMA EQUAZIONE CHE ABBIAMO TRASFORMATO IN UNA EQUAZIONE DI 1°

AD UNA INCOGNITA, FACILMENTE RISOLVIBILE:

$$\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}=6-y$$

$$\frac{2}{3}y+y=6+\frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{\cancel{3}}y=\frac{20}{\cancel{3}}$$

$$5y=20$$

$$\boxed{y=\frac{20}{5}=4}$$

A QUESTO PUNTO SOSTITUIAMO IL VALORE DI Y NELLA PRIMA EQUAZIONE

$$x=6-\boxed{y}=6-\boxed{4}=2$$

ED ABBIAMO OTTENUTO LA SOLUZIONE

$$\boxed{(2;4)}$$

- METODO PER RIDUZIONE

DATO UN SISTEMA LINEARE IN FORMA NORMALE, QUESTO METODO PREVEDE DI ELIMINARE UNA DELLE 2 INCOGNITE IN UNA DELLE 2 EQUAZIONI, IN UN COLPO SOLO:

1) SI MOLTIPLICA UNA DELLE 2 EQUAZIONI PER UN NUMERO DIVERSO DA ZERO, IN MODO CHE UNA DELLE 2 INCOGNITE ~~I...~~ NELLE 2 EQUAZIONI ABBIA I COEFFICIENTI UGUALI O OPPOSTI;

2) SI SOTTRAGGONO O SOMMANO MEMBRO A MEMBRO LE 2 EQUAZIONI IN MODO CHE UNA DELLE 2 INCOGNITE VENGA ELIMINATA;

3) SI SCRIVE UN NUOVO SISTEMA FORMATO DA UNA DELLE 2 EQUAZIONI INIZIALI E DALL'EQUAZIONE IN 1 INCOGNITA OTTENUTA;

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO SEMPRE IL SISTEMA

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$$

1) PASSO 1, MOLTIPLICHIAMO PER 3 LA PRIMA EQUAZIONE

$$\begin{cases} 3\cdot(x+y)=3\cdot 6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+3y=18 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$$

2) PASSO 2, SOTTRAIAMO MEMBRO A MEMBRO LE 2 EQUAZIONI

$$3x+3y-(3x-2y)=18-(-2)$$

$$\cancel{3x}+3y-\cancel{3x}+2y=18+2$$

$$5y=20$$

$$\boxed{y=\frac{20}{5}=4}$$

3) PASSO 3, RISCRIVIAMO IL NUOVO SISTEMA E LO RISOLVIAMO

$$\begin{cases} x+y=6 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-\boxed{4}=2 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(2;4)}$$

- METODO DI CRAMER

QUESTO METODO CONSISTE NEL SFRUTTARE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI (VISTA IN PRECEDENZA):

1) PASSO 1, SI SCRIVE LA MATRICE DEI COEFFICIENTI E SE NE CALCOLA IL DETERMINANTE D, SE $D\neq 0$ IL SISTEMA È DETERMINATO E SI CONTINUA, SE $D\neq 0$ IL SISTEMA È INDETERMINATO O IMPOSSIBILE E CI SI FERMA

2) PASSO 2, SE $D\neq 0$, SI SCRIVONO ALTRE 2 MATRICI:

QUELLA CON AL POSTO DEI COEFFICIENTI DELLA X I TERMINI NOTI, E QUELLA CON AL POSTO DEI COEFFICIENTI DELLA Y I TERMINI NOTI, E SE NE CALCOLANO I DETERMINANTI CHE CHIAMEREMO D_x e D_y _ NEL CASO 2x2) (3 NEL CASO 3x3 E COSÌ VIA ___)

$\boxed{3}$ PASSO 3, SI CALCOLA IL VALORE DELLE INCOGNITE RAPPORTANDO IL DETERMINANTE DELLE RISPETTIVE MATRICI AL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI _

CIOÈ (2x2):

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

$$\boxed{D\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0} \Rightarrow \boxed{D_x\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \boxed{D_y\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{x=\frac{D_x}{D}} \qquad \boxed{y=\frac{D_y}{D}}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$$

$$\boxed{D\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=-2-3=-5\boxed{\neq 0}$$

$$\boxed{D_x\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}=-12+2\boxed{=-10}$$

$$\boxed{D_y\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=-2-18\boxed{=-20}$$

$$x=\frac{\cancel{-}10}{\cancel{-}5}=2 \quad y=\frac{\cancel{-}20}{\cancel{-}5}=4 \Rightarrow \boxed{(2;4)}$$

SISTEMI 3x3 (3 EQUAZIONI E 3 INCOGNITE)

IN QUESTO CASO SIGNIFICA CONSIDERARE 3 RETTE NELLO SPAZIO CARTESIANO (3 DIMENSIONI)

CONSIDERANDO LA FORMA GENERICA DI UN SISTEMA 3X3

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE SARÀ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

DELLA QUALE SE NE PUÒ CALCOLARE IL DETERMINANTE MEDIANTE GLI SVILUPPI DEL TEOREMA DI "LAPLACE", CIOÈ FORMULE RICORSIVE CHE POSSONO ESSERE APPLICATE PER RIGHE O PER COLONNE A MATRICI QUADRATE DI ORDINE QUALSIASI, (CIOÈ 2x2, 3x3, 4x4, ...).

TRALASCIANDO IL TEOREMA DI LAPLACE IN QUESTA SEDE, PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE LA PRIMA RIGA DELLA NOSTRA MATRICE

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ (a_1 ; & b_1 ; & c_1) \end{array}$$

E CONSIDERIAMO CON SEGNO − (MENO) OGNI COEFFICIENTE IN ESSA CONTENUTO IN POSIZIONE PARI (NEL NOSTRO CASO SOLO b_1...), CIOÈ:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ (a_1 ; & -b_1 ; & c_1) \end{array}$$

A QUESTO PUNTO MOLTIPLICHIAMO OGNI COEFFICIENTE PER IL DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE CHE SI OTTIENE ESCLUDENDO LA RIGA (IN QUESTO CASO LA 1...) E LA COLONNA DEL COEFFICIENTE STESSO, CIOÈ:

$$D = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

A QUESTO PUNTO QUINDI SAPPIAMO CHE SE

$$\boxed{D \neq 0}$$

IL DETERMINANTE È DIVERSO DA Ø (ZERO) IL SISTEMA È DETERMINATO E AMMETTE UNA SOLUZIONE, CIOÈ UNA TRIPLA DI VALORI

$$\boxed{(x, y, z)}$$

E QUINDI LE TRE RETTE DEL SISTEMA 3×3, SONO TRE RETTE INCIDENTI NELLO SPAZIO, CHE SI INCONTRANO NEL PUNTO CHE È LA TRIPLA DI VALORI SOLUZIONE DEL SISTEMA

MENTRE SE D=0 IL SISTEMA SARÀ

- INDETERMINATO
  RETTE NELLO SPAZIO COINCIDENTI
- IMPOSSIBILE
  RETTE NELLO SPAZIO PARALLELE O SGHEMBE

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = -3 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

CALCOLIAMO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

UTILIZZANDO IL TEOREMA DI LAPLACE CONSIDERIAMO LA PRIMA RIGA, CAMBIANDO DI SEGNO I COEFFICIENTI IN POSIZIONE PARI:

$$\boxed{(2\ ;\ -1\ ;\ -1)}$$

COSÌ:

$$\boxed{D = 2 \cdot D\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot D\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot D\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}$$

CIOÈ:

$$\boxed{D =} 2 \cdot \left[-1 \cdot (2) - (-1) \cdot 4\right] - 1 \cdot \left[3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4\right] - 1 \cdot \left[3 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[-2 + 4\right] - 1 \cdot \left[6 + 4\right] - 1 \cdot \left[-3 - 1\right] =$$

$$= 2 \cdot (+2) - 1 \cdot (10) - 1 \cdot (-4) =$$

$$= 4 - 10 + 4 = \boxed{-2}$$

QUINDI IL SISTEMA È DETERMINATO E DETERMINIAMO LA SOLUZIONE MEDIANTE IL METODO PER SOSTITUZIONE:

$$\begin{cases} y = -2x + z + 5 \\ 3x - (-2x + z + 5) + 4z = -3 \\ -x - (-2x + z + 5) + 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + z + 5 \\ 3x + 2x - z - 5 + 4z = -3 \\ -x + 2x - z - 5 + 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + z + 5 \\ 5x + 3z = 5 - 3 \\ +x + z = 5 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2(-z) + z + 5 \\ 5(-z) + 3z = 2 \\ x = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3z + 5 \\ -2z = 2 \\ x = -z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3(-1)+5 \\ z = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}}$$

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA È LA TRIPLA DI VALORI

$$\boxed{(1\,;\,2\,;\,-1)}$$

VERIFICHIAMONE LA CORRETTEZZA SOSTITUENDO TALI VALORI NELLA PRIMA EQUAZIONE:

$$2x + y - z = 5$$

$$2\cdot(1) + 2 - (-1) = 5$$

$$2 + 2 + 1 = 5$$

$$\boxed{5 = 5}$$

IDENTITÀ VERA, QUINDI LA SOLUZIONE È CORRETTA –

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

UN SISTEMA LINEARE IN CUI I TERMINI NOTI DELLE EQUAZIONI CHE LO COMPONGONO SONO TUTTI NULLI È DETTO SISTEMA LINEARE OMOGENEO.

ESEMPI DI SISTEMI LINEARI OMOGENEI SONO:

$$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} 3x-y+z=0 \\ 2x+y-4z=0 \\ x-3y+5z=0 \\ 4x-2y+3z=0 \end{cases}$$

MENTRE SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI SONO:

$$\begin{cases} 2x+7y=-19 \\ 8x+y=5 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$$

UNA PROPRIETÀ FONDAMENTALE DEI SISTEMI LINEARI OMOGENEI È CHE QUESTO TIPO DI SISTEMI AMMETTE SEMPRE ALMENO UNA SOLUZIONE, DETTA SOLUZIONE BANALE DATA DAL VALORE DELLE INCOGNITE TUTTE PARI A ZERO ($\emptyset$).

ESPRESSIONE MATRICIALE

OGNI SISTEMA LINEARE E DI CONSEGUENZA ANCHE I SISTEMI LINEARI OMOGENEI, SI PUÒ RAPPRESENTARE MEDIANTE L'ESPRESSIONE:

$$Ax=C$$

DOVE

A È LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE
X È IL VETTORE COLONNA DELLE INCOGNITE
C È IL VETTORE COLONNA DEI TERMINI NOTI

AD ESEMPIO

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}}_{C}$$

$$A \cdot X = C$$

NATURALMENTE NEL CASO DEI SISTEMI LINEARI OMOGENEI IL VETTORE COLONNA C SARÀ FORMATO DA TUTTI Ø.
DALLA ESPRESSIONE MATRICIALE MEDIANTE IL PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN VETTORE (RIGA PER COLONNA) SI PASSA ALLA NORMALE ESPRESSIONE ALGEBRICA DEL SISTEMA.