

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI NEL PIANO^①

DEFINIZIONE

SI DEFINISCE LUOGO GEOMETRICO DI PUNTI IN UN PIANO, L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI, E SOLO QUEI PUNTI, CHE GODONO DI UNA DETERMINATA PROPRIETÀ —

UNA FIGURA GEOMETRICA È QUINDI UN LUOGO GEOMETRICO SE TUTTI I SUOI PUNTI E SOLO ESSI, SODDISFANO UNA PROPRIETÀ —

AFFERMARE CHE UNA FIGURA "F" È LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI CHE GODONO DELLA PROPRIETÀ "R", EQUIVALE A SCRIVERE:

$$P \text{ È UN PUNTO DI } F \iff P \text{ GODDE DELLA PROPRIETÀ } R$$

SE E SOLO SE

CONSIDERATO UN PIANO CARTESIANO ORTOGONALE, CON ASSE X (ASCISSE) ED ASSE Y (ORDINATA), OGNI SUO PUNTO VIENE ESPRESSO MEDIANTE LE COORDINATE

$$P(x;y)$$

UNA PROPRIETÀ GEOMETRICA CHE CARATTERIZZA I PUNTI DI UN DETERMINATO LUOGO GEOMETRICO PUÒ ESSERE TRADOTTA IN UNA RELAZIONE ALGEBRICA CHE LEGA L'ASCISSE E L'ORDINATA DEI SUOI PUNTI, DESCRITTA DA UN'EQUAZIONE DEL TIPO:

$$f(x;y) = 0$$

CHE È SODDISFATTA SOLO DAI PUNTI $P(x;y)$ CHE FORMANO IL LUOGO —

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

SUPPONIAMO AD ESEMPIO CHE:

$$X^2 + Y^2 + 2X - 4Y + 3 = 0$$

SIA L'EQUAZIONE DI UN LUOGO GEOMETRICO -
VERIFICHIAMO SE I PUNTI

$$P(0;3) \quad \text{E} \quad Q(1;2)$$

APPARTENGONO AD ESSO.

SOSTITUIAMO QUINDI LE COORDINATE DEI DUE
PUNTI NELL'EQUAZIONE:

$$P) \quad \cancel{(0)^2} + \cancel{(3)^2} + \cancel{2 \cdot 0} - 4 \cdot 3 + 3 = 0$$

$$9 - 12 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

IL PUNTO P SODDISFA
L'EQUAZIONE

$$Q) \quad (1)^2 + (2)^2 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 = 0$$

$$1 + 4 + 2 - 8 + 3 = 0$$

$$+2 \neq 0$$

IL PUNTO Q NON
SODDISFA L'EQUAZIONE

QUINDI P APPARTIENE AL LUOGO MENTRE Q NO.

INDIVIDUARE UN LUOGO GEOMETRICO

SUPPONIAMO DI DOVER DETERMINARE IL LUOGO GEOMETRICO
DEI PUNTI DISTANTI 4 DA UN CERTO PUNTO P DI
COORDINATE (2;5).

SI POTREBBE ANCHE NON NOTARE IMMEDIATAMENTE CHE
SI TRATTA DI UNA CIRCONFERENZA, PERCHÉ MOLTO

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

SPESSO I LUOGHI GEOMETRICI NON SONO FUNZIONI CANONICHE.

LE VARIABILI DEL PROBLEMA SONO SEMPLICEMENTE LA X E LA Y , CIOÈ LE COORDINATE DEL GENERICO PUNTO $P(x;y)$ DEL PIANO, CHE DEVE APPARTENERE AL LUOGO GEOMETRICO.

VISTA LA RICHIESTA DEL PROBLEMA, CONSIDERIAMO LA FORMULA GENERICA DELLA DISTANZA TRA DUE PUNTI NEL PIANO, CIOÈ CONSIDERATI:

$$A(x_A; y_A) \quad \text{E} \quad B(x_B; y_B)$$

LA LORO DISTANZA SARÀ:

$$\text{DISTANZA } (\overline{AB}) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

A QUESTO PUNTO SE A È IL NOSTRO GENERICO PUNTO $P(x,y)$, B È IL PUNTO DI COORDINATE $(2;5)$, CONOSCEENDO LA DISTANZA (CIOÈ 4), ALLORA:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = 4$$

QUESTA È L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO RICHIESTO. FACENDO QUALCHE CALCOLO ALGEBRICO, POSSIAMO TRASFORMARLA PER CAPIRE DI QUALE ESPRESSIONE IN PARTICOLARE SI TRATTA.

ELEVIAMO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} \right)^2 = 16$$

SVILUPPIAMO I QUADRATI E RIORDINIAMO:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 16$$

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 + 25 - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$$

EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO DI TUTTI I PUNTI DISTANTI 4 DAL PUNTO DI COORDINATE (2,5), CIOÈ UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO 4 E CENTRO IN (2;5).
VERIFICHIAMO CHE È VERO, CIOÈ SAPPATTO CHE DATA L'EQUAZIONE CANONICA DELLA CIRCONFERENZA

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

LE COORDINATE DEL CENTRO SONO:

$$C(\alpha; \beta) \quad \text{DOVE} \quad \alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{E} \quad \beta = -\frac{b}{2}$$

MENTRE IL RAGGIO È:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

NEL NOSTRO CASO ESSENDO $a = -4$; $b = -10$ E $c = +13$ SI HA:

$$\alpha = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$\beta = -\frac{-10}{2} = 5$$

QUINDI LE COORDINATE DEL CENTRO SONO

$$(2; 5)$$

$$r = \sqrt{2^2 + 5^2 - 13} = \sqrt{4 + 25 - 13} = \sqrt{16} = 4$$

CHE È IL RAGGIO

ESEMPI

1) DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO IN CUI TUTTI I PUNTI SONO EQUIDISTANTI, CIOÈ HANNO

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

LA STESSA DISTANZA, DA UN PUNTO $A(3,1)$ E DA ²⁾
UNA RETTA "r" PARALLELA ALL'ASSE X, $y = -1$.

IN QUESTO CASO, INDICHO CON

$$P(x, y)$$

IL GENERICO PUNTO APPARTENENTE AL LUOGO,
BISOGNA UGUAGLIARE L'ESPRESSIONE DELLA
DISTANZA DI TALE PUNTO DAL PUNTO A E
L'ESPRESSIONE DELLA DISTANZA DI TALE PUNTO
DALLA RETTA "r".

LA DISTANZA DEL GENERICO PUNTO P DAL PUNTO
A, COME SAPPIAMO È:

$$PA = \sqrt{(x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

MENTRE PER LA DISTANZA DALLA RETTA, PARTIAMO
DALLA FORMULA IN GENERALE DELLA DISTANZA
DI UN PUNTO DA UNA RETTA:

$$d(p, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

DOVE a, b E C SONO I COEFFICIENTI DELLA
EQUAZIONE DELLA RETTA IN FORMA IMPLICITA.
SCRIVIAMO QUINDI L'EQUAZIONE IN FORMA IMPLICITA
DELLA RETTA "r":

$$y = -1 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow a = 0; b = 1; c = 1$$

COSÌ:

$$d(p, r) = \frac{|0 \cdot x_p + 1 \cdot y_p + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|y + 1|}{1} = |y + 1|$$

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

A QUESTO PUNTO EQUAGLIAMO LE 2 ESPRESSIONI:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |y+1|$$

FACCIAMO IL QUADRATO DI ENTRAMBI I MEMBRI:

$$\left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = (|y+1|)^2$$

CIOÈ:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$

RISOLVIAMO I QUADRATI:

$$x^2 - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2} + 2y + 1$$

RIORDINIAMO E SOMMIAMO:

$$x^2 - 6x + 9 = 4y$$

COSÌ:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

È L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO CERCATO, CHE RAPPRESENTA UNA PARABOLA NEL PIANO CON COEFFICIENTI $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{3}{2}$ E $c = \frac{9}{4}$, FUOCO PROPRIO IL PUNTO A E DIRETTRICE LA RETTA "r".

VERIFICHIAMO

LE COORDINATE DEL FUOCO DI UNA GENERICA PARABOLA SONO:

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

CIOÈ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

QUINDI:

$$F\left(-\frac{-\frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4}}; \frac{1-0}{4 \cdot \frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{3}{2} \cdot 2; \frac{1}{1}\right) = (3; 1)$$

MENTRE LA DIRETTRICE È:

$$d: y = \frac{-1-\Delta}{4a} = \frac{-1-0}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$d: y = -1$$

(C.V.V.)

2) DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL LUOGO GEOMETRICO IN CUI TUTTI I PUNTI SONO EQUIDISTANTI DA 2 PUNTI $A(4;3)$ E $B(5;1)$ -

INDICATO CON

$$P(x; y)$$

IL GENERICO PUNTO, DOVRÀ ESSERE:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

CIOÈ:

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$$

SVOLGENDO:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-3)^2 &= (x-5)^2 + (y-1)^2 \\ \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 6y + 9 &= \cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} - 2y + 1 \\ -4y &= -8x + 16 \end{aligned}$$

$$y = 2x - 4$$

CHE IN DEFINITIVA È L'ASSE DEL SEGMENTO $\overline{AB}$ -

EQUAZIONI DI LUOGHI GEOMETRICI

LUOGHI GEOMETRICI CON EQUAZIONI IN FORMA CANONICA NOTE

1) PARABOLA

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO F DETTO FUOCO E DA UNA RETTA d DETTA DIRETTRICE, CIOÈ:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{CON LA DIRETTRICE PARALLELA ALL'ASSE } X$$

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{CON LA DIRETTRICE PARALLELA ALL'ASSE } Y$$

2) CIRCONFERENZA

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO C DETTO CENTRO, CIOÈ:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{EQUAZIONE CANONICA COMPLETA}$$

3) ELLISSE

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO TALI CHE LA SOMMA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI FISSI F_1 ED F_2 DETTI FUOCHI È COSTANTE, CIOÈ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{CON } a > b \text{ ASSE MAGGIORE PARALLELO ALL'ASSE } X \\ \text{CON } a < b \text{ ASSE MAGGIORE PARALLELO ALL'ASSE } Y \end{array}$$

4) IPERBOLE

LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI DEL PIANO TALI CHE LA DIFFERENZA IN VALORE ASSOLUTO DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI FISSI F_1 ED F_2 DETTI FUOCHI È COSTANTE, CIOÈ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{CON } a > b \text{ FUOCHI SULL'ASSE } X \\ \text{CON } a < b \text{ FUOCHI SULL'ASSE } Y \end{array}$$