

SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

UN POLINOMIO DI QUALSIASI GRADO PUÒ ESSERE SCOMPOSTO NEL PRODOTTO DI PIÙ POLINOMI DI GRADO INFERIORE MEDIANTE LA DIVISIONE DEL POLINOMIO PER UN BINOMIO DI 1° GRADO, CHE SIA SUO DIVISORE, CIOÈ CHE NELLA DIVISIONE NON DIA RESTO IN MODO CHE POSSIAMO SCRIVERE

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x)$$

DOVE

$P(x)$ POLINOMIO DIVIDENDO DI GRADO m

$D(x)$ POLINOMIO DIVISORE DI GRADO 1

$Q(x)$ POLINOMIO QUOZIENTE DI GRADO $m-1$

PER TROVARE IL BINOMIO DI 1° GRADO DIVISORE SFRUTTANDO IL TEOREMA DELLE RADICI RAZIONALI, SECONDO IL QUALE PER UN POLINOMIO DI GRADO m LE EVENTUALI RADICI (CIOÈ QUEI VALORI CHE SOSTITUITI ALLA SUA VARIABILE LO RENDONO NULLO, OSSIA UGUALE A ZERO) SE ESISTONO SONO DA RICERCARE NELLA FRAZIONE:

$$\frac{p}{q}$$

DOVE

p È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL TERMINE NOTO

E

q È UN DIVISORE POSITIVO O NEGATIVO DEL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO

UNA VOLTA DETERMINATA LA RADICE DEL POLINOMIO IL BINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO SARÀ:

$$(x - \text{radice})$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

ESEMPIO 1

SCOMPONIAMO IL POLINOMIO

$$P(x) = x^5 - x - 2x^4 + 2$$

TERMINE NOTO +2 (DIVISORI $\pm 1; \pm 2$)

COEFFICIENTE TERMINE GRADO MASSIMO +1 (DIVISORI ± 1)

QUINDI SE ESISTONO LE RADICI RAZIONALI DEL POLINOMIO VANNO CERCATE TRA

$$\{\pm 1; \pm 2\}$$

COSÌ:

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^5 - (-1) - 2(-1)^4 + 2 = \\ &= -1 + 1 - 2 + 2 = 0 \quad -1 \text{ È RADICE} \end{aligned}$$

ORDINIAMO E COMPLETIAMO IL POLINOMIO

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2$$

ED EFFETTUIAMO LA DIVISIONE PER $(x - (-1)) = (x + 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 2 & x+1 \\ \hline -x^5 - x^4 & x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \\ \hline // -3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 2 & \\ +3x^4 + 3x^3 & \\ \hline // +3x^3 + 0x^2 - x + 2 & \\ -3x^3 - 3x^2 & \\ \hline // -3x^2 - x + 2 & \\ +3x^2 + 3x & \\ \hline // +2x + 2 & \\ -2x - 2 & \\ \hline // & \end{array}$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

QUINDI

$$(x^5 - 2x^4 - x + 2) = (x+1)(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2)$$

ITERIAMO IL PROCEDIMENTO CONSIDERANDO IL QUOZIENTE OTTENUTO COME NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE.

$$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 3 + 3 + 2 = 12 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 3 - 3 + 2 = 0 \quad \text{+1 È RADICE}$$

DIVIDIAMO ALLORA PER $(x-1)$, CIOÈ:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 & x-1 \\ \underline{-x^4 + x^3} & x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ // & \underline{-x^3 + x^2} & x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{+2x^3 - 2x^2} & \underline{-x^2 + 3x - 2} \\ // & & \underline{-x^2 + x} & -2x + 2 \\ & & \underline{+2x^2 - 2x} & \underline{+2x - 2} \\ & & // & // \end{array}$$

QUINDI

$$(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) = (x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

COSÌ

$$(x^5 - 2x^4 - x + 2) = (x+1)(x-1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$$

CONTINUIAMO CONSIDERANDO IL NUOVO QUOZIENTE COME IL NUOVO POLINOMIO DA SCOMPORRE

SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) - 2 =$$

$$= -1 - 2 - 1 - 2 = -6 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 2 =$$

$$= 1 - 2 + 1 - 2 = -2 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) - 2 =$$

$$= -8 - 8 - 2 - 2 = -20 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 2 - 2 =$$

$$= 8 - 8 + 2 - 2 = 0 \quad \text{2 È RADICE}$$

DIVIDIAMO ALLORA PER $(x-2)$, CIOÈ:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - \cancel{2x^2} + x - 2 & x-2 \\ -\cancel{x^3} + \cancel{2x^2} & \\ \hline // // & x^2 + 1 \\ +\cancel{x} - \cancel{2} & \\ -\cancel{x} + \cancel{2} & \\ \hline // // & \end{array}$$

QUINDI

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2) = (x-2)(x^2 + 1)$$

COSÌ

$$(x^5 - 2x^4 - x + 2) = (x+1)(x-1)(x-2)(\underline{x^2 + 1})$$

A QUESTO PUNTO VISTO CHE L'ULTIMO QUOZIENTE È LA SOMMA DI 2 QUADRATI, CHE SAPPIAMO ESSERE UN POLINOMIO NON SCOMPONIBILE PERCHÉ NON AMMETTE RADICI RAZIONALI, LA SCOMPOSIZIONE SI CONCLUDE E CIOÈ:

$$(x^5 - 2x^4 - x + 2) = (x+1)(x-1)(x-2)(x^2 + 1)$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

ESEMPIO 2

SCOMPONIAMO IL POLINOMIO

$$P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$$

CONSIDERANDO SEMPRE IL RAPPORTO TRA I DIVISORI DEL TERMINE NOTO ED IL COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO, CERCHIAMO LE SUE EVENTUALI RADICI RAZIONALI PER DETERMINARE IL POLINOMIO DIVISORE DI 1° GRADO:

$$P(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 - (-1) + 30 = \\ = -1 - 6 + 1 + 30 = 24$$

NON È RADICE

$$P(1) = (1)^3 - 6(1)^2 - (1) + 30 = \\ = 1 - 6 - 1 + 30 = 24$$

NON È RADICE

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 - (-2) + 30 = \\ = -8 - 24 + 2 + 30 = 0$$

-2 È RADICE

COSÌ DIVIDIAMO PER $(x - (-2)) = (x + 2)$, CIOÈ:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - 6x^2 - x + 30 & x + 2 \\ \underline{-\cancel{x^3} - 2x^2} & \underline{ x^2 - 8x + 15} \\ // \quad \cancel{-8x^2} - x + 30 & \\ \quad \underline{+ 8x^2 + 16x} & \\ // \quad \quad \underline{+ 15x + 30} & \\ \quad \quad \quad \underline{- 15x - 30} & \\ // \quad // & \end{array}$$

QUINDI

$$(x^3 - 6x^2 - x + 30) = (x + 2)(\underline{x^2 - 8x + 15})$$

SCOMPOSIZIONE POLINOMI MEDIANTE DIVISIONE

SCOMPONIAMO ADESSO IL NUOVO QUOZIENTE CERCANDO LE SUE EVENTUALI RADICI RAZIONALI:

$$P(2) = (2)^2 - 8(2) + 15 = 4 - 16 + 15 = 3 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(-3) = (-3)^2 - 8(-3) + 15 = 9 + 24 + 15 = 48 \quad \text{NON È RADICE}$$

$$P(3) = (3)^2 - 8(3) + 15 = 9 - 24 + 15 = 0 \quad 3 \text{ È RADICE}$$

DIVISIAMO COSÌ PER $(x-3)$, CIOÈ:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} - 8x + 15 & x-3 \\ -\cancel{x^2} + 3x & x-5 \\ \hline // \quad \cancel{-5x} + \cancel{15} & \\ + \cancel{5x} - \cancel{15} & \\ \hline // & // \end{array}$$

QUINDI

$$(x^2 - 8x + 15) = (x - 3)(x - 5)$$

ED ALLORA

$$(x^3 - 6x^2 - x + 30) = (x+2)(x-3)(x-5)$$