

SISTEMI NON LINEARI

UN SISTEMA QUADRATO CON DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE È DETTO **SIMMETRICO** SE SCAMBIANDO LE INCOGNITE TRA LORO LE EQUAZIONI NON CAMBIANO. AD ESEMPIO:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

INFATTI IN ESSO SE SCAMBIAMO LA x CON LA y OTTENIAMO

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 25 \\ y + x = 7 \end{cases}$$

CHE È UGUALE A QUELLO PRECEDENTE E VARIA SOLO NELL'ORDINE IN CUI SI DISPONGONO I TERMINI. UN ALTRO ESEMPIO PUÒ ESSERE

$$\begin{cases} xy = -3 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

ANCHE IN QUESTO CASO SCAMBIANDO x E y SI OTTIENE UN SISTEMA IDENTICO:

$$\begin{cases} yx = -3 \\ y + x = -2 \end{cases}$$

UNA PROPRIETÀ FONDAMENTALE DI QUESTO TIPO DI SISTEMI È CHE SE

$$x = \alpha \text{ E } y = \beta$$

È UNA SUA SOLUZIONE, L'ALTRA SARÀ OVVIAMENTE

$$x = \beta \text{ E } y = \alpha$$

CHE SI OTTIENE SCAMBIANDO LA x CON LA y .

SISTEMA SIMMETRICO ELEMENTARE

IL SEMPLICE SISTEMA SIMMETRICO DI 1° GRADO

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

È DETTO **ELEMENTARE (O FONDAMENTALE)** PERCHÉ LA RISOLUZIONE DI QUALSIASI ALTRO SISTEMA SIMMETRICO PASSA PER LA SUA RISOLUZIONE.

QUESTO SISTEMA CI DICE CHE STIAMO CERCANDO DUE NUMERI x E y DEI QUALI CONOSCIAMO LA SOMMA a ED IL PRODOTTO b .

DETTO QUESTO ALLORA POSSIAMO FARE RIFERIMENTO ALLA PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI DI 2° GRADO

(VEDI LEZIONE SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO AD UNA INCOGNITA) PER LA QUALE INDICANDO CON $S(a)$

LA SOMMA E CON $P(b)$ IL PRODOTTO DELLE SUE DUE SOLUZIONI REALI POSSIAMO SCRIVERE L'EQUAZIONE COME (CONSIDERANDO z COME INCOGNITA)

$$z^2 - Sz + P = 0$$

E CIOÈ IN RIFERIMENTO AL NOSTRO SISTEMA

$$z^2 - az + b = 0$$

OBTENIAMO COSÌ LA SUA **EQUAZIONE RISOLVENTE**.

SE z_1 E z_2 SONO LE SOLUZIONI DI TALE EQUAZIONE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SARANNO

$$(z_1, z_2) \text{ E } (z_2, z_1)$$

VISTO CHE IN UN SISTEMA SIMMETRICO POSSONO ESSERE SCAMBIATI TRA LORO I VALORI DI x E y .

SISTEMI NON LINEARI

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{SOMMA}=-2 \\ \text{PRODOTTO}=-3 \end{matrix}$$

QUINDI

$$z^2 - Sz + P = 0$$

CIOÈ

$$z^2 - (-2)z + (-3) = 0$$

COSÌ

$$z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow a=1 \quad b=2 \quad c=-3$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2-4}{2} = -\frac{6}{2} = -3 = z_1 = x \\ \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 = z_2 = y \end{cases}$$

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO

$$(-3, 1) \text{ E } (1, -3)$$

ESERCIZI

$$1 \quad \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} S=7 \\ P=12 \end{matrix}$$

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \Rightarrow a=1 \quad b=-7 \quad c=12$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(12) = 49 - 48 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$(3, 4) \text{ E } (4, 3)$$

$$2 \quad \begin{cases} x+y=-16 \\ xy=48 \end{cases} \Rightarrow S=-16 \quad P=48$$

$$z^2 - (-16)z + 48 = 0$$

$$z^2 + 16z + 48 = 0 \quad a=1 \quad b=16 \quad c=48$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot (48) = 256 - 192 = 64$$

$$z_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-16 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-16-8}{2} = -\frac{24}{2} = -12 \\ \frac{-16+8}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

$$(-12, -4) \in (-4, -12)$$

$$3 \quad \begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow S=0 \quad P=1$$

$$z^2 - 0z + 1 = 0$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z = \pm \sqrt{-1}$$

IMPOSSIBILE

$$4 \quad \begin{cases} x+y=-\frac{9}{10} \\ xy=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow S=-\frac{9}{10} \quad P=\frac{1}{5}$$

$$z^2 - \left(-\frac{9}{10}\right)z + \frac{1}{5} = 0$$

$$z^2 + \frac{9}{10}z + \frac{1}{5} = 0$$

$$10z^2 + 9z + 2 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2 = 81 - 80 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 10} = \frac{-9 \pm 1}{20} = \begin{cases} \frac{-9-1}{20} = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-9+1}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right) \in \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}\right)$$

SISTEMI RICONDUCEBILI AL SIMMETRICO ELEMENTARE

A SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA SI PRESENTI COME

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$$

DOVE LA DIFFERENZA CON QUELLO FONDAMENTALE STA NEL SEGNO MENO DAVANTI ALLA y NELLA PRIMA EQUAZIONE.

LA PRIMA EQUAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME

$$x + (-y) = a$$

MENTRE NELLA SECONDA POSSIAMO MOLTIPLICARE ENTRAMBI I MEMBRI PER -1 , CIOÈ

$$(-1) \cdot xy = b \cdot (-1) \Rightarrow x(-y) = -b$$

COSÌ IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} x + (-y) = a \\ x(-y) = -b \end{cases}$$

CIOÈ UN SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE.

L'UNICA **ATTENZIONE** CHE SI DEVE PRESTARE STA **NELLO SCRIVERE LE SOLUZIONI**, PERCHÉ COSÌ

FACENDO DETERMINIAMO LE SOLUZIONI DI x

E $-y$ MENTRE INVECE DOBBIAMO DETERMINARE

SEMPRE x E y , COSÌ SE LE SOLUZIONI OTTENUTE SARANNO

(z_1, z_2) E (z_2, z_1) LE SOLUZIONI DEFINITIVE DOVRANNO ESSERE SCRITTE COME

$(x_1 = z_1, -y_1 = z_2)$ E $(x_2 = z_2, -y_2 = z_1)$ CIOÈ $(x_1 = z_1, y_1 = -z_2)$ E $(x_2 = z_2, y_2 = -z_1)$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ xy = -15 \end{cases} \Rightarrow y' = -y \text{ e } y = -y' \Rightarrow \begin{cases} x + y' = 8 \\ \cancel{xy' = -15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y' = 8 \\ xy' = 15 \end{cases}$$

così

$$z^2 - 8z + 15 = 0 \quad a = -1 \quad b = -8 \quad c = 15$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(15) = 64 - 60 = 4$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3 = z_1 \\ \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 = z_2 \end{cases}$$

QUINDI

$$(z_1, -z_2) \text{ e } (z_2, -z_1) \Rightarrow (3, -5) \text{ e } (5, -3)$$

B

SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA SI PRESENTI
COME

$$\begin{cases} k_1 x + k_2 y = a \\ xy = b \end{cases}$$

DOVE LA DIFFERENZA CON QUELLO FONDAMENTALE
STA NEI COEFFICIENTI DIVERSI DA 1 DELLE
INCOGNITE x E y NELLA PRIMA EQUAZIONE.
MOLTIPLICANDO PERÒ ENTRAMBI I MEMBRI
DELLA SECONDA EQUAZIONE PER k_1, k_2
OTTENIAMO

$$\begin{cases} k_1 x + k_2 y = a \\ k_1 k_2 xy = k_1 k_2 b \end{cases}$$

CIOÈ

SISTEMI NON LINEARI

$$\begin{cases} K_1 x + K_2 y = a \\ K_1 x \cdot K_2 y = K_1 K_2 b \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO INDICANDO CON

$$X' = K_1 x \quad \text{E} \quad Y' = K_2 y$$

OTTENIAMO IL SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE

$$\begin{cases} X' + Y' = a \\ X' Y' = K_1 K_2 b \end{cases}$$

CHE POSSIAMO RISOLVERE MEDIANTE LA SUA EQUAZIONE RISOLVENTE

$$Z^2 - aZ + K_1 K_2 b = 0$$

FACENDO **ATTENZIONE NELLO SCRIVERE LE SOLUZIONI**

COSÌ SE LE SOLUZIONI OTTENUTE SARANNO (Z_1, Z_2) E (Z_2, Z_1)

QUELLE DEFINITIVE DOVRANNO ESSERE

$$(X'_1 = Z_1, Y'_1 = Z_2) \quad \text{E} \quad (X'_2 = Z_2, Y'_2 = Z_1)$$

QUINDI

$$(K_1 X_1 = Z_1, K_2 Y_1 = Z_2) \quad \text{E} \quad (K_1 X_2 = Z_2, K_2 Y_2 = Z_1)$$

CIOÈ

$$\left(X_1 = \frac{Z_1}{K_1}, Y_1 = \frac{Z_2}{K_2} \right) \quad \text{E} \quad \left(X_2 = \frac{Z_2}{K_1}, Y_2 = \frac{Z_1}{K_2} \right)$$

VEDIAMO UN ESEMPIO

SISTEMI NON LINEARI

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ xy = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x' = 2x \quad y' = -3y \Rightarrow x = \frac{x'}{2} \quad y = -\frac{y'}{3}$$

QUINDI

$$\begin{cases} 2\left(\frac{x'}{2}\right) - 3\left(-\frac{y'}{3}\right) = 8 \\ \frac{x'}{2} \cdot \left(-\frac{y'}{3}\right) = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 8 \\ -x'y' = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 8 \\ x'y' = -9 \end{cases}$$

ALLORA

$$z^2 - 8z - 36 = 0 \quad a=1 \quad b=-8 \quad c=-9$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(-9) = 64 + 36 = 100$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 = z_1 \\ \frac{18}{2} = 9 = z_2 \end{cases}$$

CIOÈ

$$(x_1' = -1, y_1' = 9) \text{ e } (x_2' = 9, y_2' = -1)$$

MA

$$(2x_1 = -1, -3y_1 = 9) \text{ e } (2x_2 = 9, -3y_2 = -1)$$

COSÌ

$$(x_1 = -\frac{1}{2}, y_1 = -3) \text{ e } (x_2 = \frac{9}{2}, y_2 = \frac{1}{3})$$

C

SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA SI PRESENTI COME

$$\begin{cases} x + y = a \\ (x + k_1)(x + k_2) = b \end{cases}$$

AGGIUNGIAMO AD ENTRAMBI I MEMBRI DELLA PRIMA EQUAZIONE $k_1 + k_2$, COSÌ

$$\begin{cases} x + y + k_1 + k_2 = a + k_1 + k_2 \\ (x + k_1)(y + k_2) = b \end{cases}$$

SISTEMI NON LINEARI

CIOÈ

$$\begin{cases} (x+k_1)+(y+k_2)=a+k_1+k_2 \\ (x+k_1)(y+k_2)=b \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO INDICANDO CON

$$x'=x+k_1 \quad \text{E} \quad y'=y+k_2$$

OTTENIAMO IL SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE

$$\begin{cases} x'+y'=a+k_1+k_2 \\ x' \cdot y'=b \end{cases}$$

CHE POSSIAMO RISOLVERE MEDIANTE LA SUA
EQUAZIONE RISOLVENTE

$$z^2 - (a+k_1+k_2)z + b = 0$$

FACENDO **ATTENZIONE NELLO SCRIVERE LE
SOLUZIONI**, CIOÈ SE LE SOLUZIONI OTTENUTE
SARANNO

$$(z_1, z_2) \text{ E } (z_2, z_1)$$

QUELLE DEFINITIVE DOVRANNO ESSERE

$$(x'_1=z_1, y'_1=z_2) \text{ E } (x'_2=z_2, y'_2=z_1)$$

QUINDI

$$(x_1+k_1=z_1, y_1+k_2=z_2) \text{ E } (x_2+k_1=z_2, y_2+k_2=z_1)$$

CIOÈ

$$(x_1=z_1-k_1, y_1=z_2-k_2) \text{ E } (x_2=z_2-k_1, y_2=z_1-k_2)$$

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} x+y=4 \\ (x+1)(y-2)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x+1 & y'=y-2 \\ x=x'-1 & y=y'+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'-1+y'+2=4 \\ x' \cdot y'=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'+y'=3 \\ x'y'=2 \end{cases}$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \quad a=1 \quad b=-3 \quad c=2$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 = z_1 \\ \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 = z_2 \end{cases}$$

$$(x'_1 = z_1, y'_1 = z_2) \text{ e } (x'_2 = z_2, y'_2 = z_1)$$

$$(x_1 + 1 = 1, y_1 - 2 = 2) \text{ e } (x_2 + 1 = 2, y_2 - 2 = 1)$$

$$(x_1 = 0, y_1 = 4) \text{ e } (x_2 = 1, y_2 = 3)$$

D SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA SI PRESENTI COME

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^n+y^n=b \end{cases} \quad \text{CON } n \in \mathbb{N}$$

QUESTO TIPO DI SISTEMA PUÒ ESSERE RISOLTO MEDIANTE L'UTILIZZO DELLE **FORMULE DI WARING**.
ATTRAVERSO TALI FORMULE A SECONDA DEL VALORE DI n È POSSIBILE RICONDURRE TALI SISTEMI AL SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE.

SISTEMI NON LINEARI

$n=2$ IN QUESTO CASO IL SISTEMA SARÀ:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

DAI PRODOTTI NOTEVOLI SAPPIAMO CHE

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

DALLA QUALE

$$(x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2$$

QUINDI IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2 - 2xy = b \end{cases}$$

COSÌ

$$\begin{cases} x+y=a \\ a^2 - 2xy = b \end{cases}$$

E ANCORA

$$\begin{cases} x+y=a \\ -2xy = b - a^2 \end{cases}$$

E CIOÈ

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy = \frac{a^2 - b}{2} \end{cases}$$

OTTENENDO IN DEFINITIVA UN SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE IN CUI LA SOMMA DELLE INCOGNITE È a MENTRE IL PRODOTTO È $\frac{a^2 - b}{2}$, E LA SUA EQUAZIONE RISOLVENTE SARÀ:

$$z^2 - az + \frac{a^2 - b}{2} = 0$$

SISTEMI NON LINEARI

VEDIAMO UN ESEMPIO -

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow a=1 \quad b=1$$

$$z^2 - z + \frac{1^2 - 1}{2} = 0$$

$$z^2 - z = 0 \Rightarrow z(z-1) = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 0 = x, \\ z_2 = 1 = y, \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,1) \text{ e } (1,0)$$

n=3 IN QUESTO CASO IL SISTEMA SARÀ

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=b \end{cases}$$

SEMPRE DAI PRODOTTI NOTEVOLI SAPPIAMO CHE

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

DALLA QUALE

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) = x^3 + y^3$$

QUINDI IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) = b \end{cases}$$

COSÌ

$$\begin{cases} x+y=a \\ a^3 - 3xya = b \end{cases}$$

E ANCORA

$$\begin{cases} x+y=a \\ -3axy = b - a^3 \end{cases}$$

SISTEMI NON LINEARI

E CIO È

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{a^3-b}{3a} \end{cases}$$

OTTENENDO UN SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE IN CUI LA SOMMA DELLE INCOGNITE È a MENTRE IL PRODOTTO È $\frac{a^3-b}{3a}$, E LA SUA EQUAZIONE RISOLVENTE SARÀ:

$$z^2 - az + \frac{a^3-b}{3a} = 0$$

VEDIAMO UN ESEMPIO:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases} \quad a=8 \quad b=152$$

$$z^2 - 8z + \frac{8^3-152}{3 \cdot 8} = 0$$

$$z^2 - 8z + 15 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(15) = 64 - 60 = 4$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3 = x_1 \\ \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 = y_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3, 5) \text{ e } (5, 3)$$

$n=4$

IN QUESTO CASO IL SISTEMA SARÀ

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=b \end{cases}$$

SISTEMI NON LINEARI

DAI PRODOTTI NOTEVOLI (VEDI TRIANGOLO DI TARTAGLIA)
SAPPIAMO CHE:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$$

IL TERMINE $6x^2y^2$ LO SCRIVIAMO COME $8x^2y^2 - 2x^2y^2$

COSÌ $(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 - 2x^2y^2$

RACCOGLIAMO PARZIALMENTE $4xy$

$$(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2y^2$$

ANCORA

$$(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x+y)^2 - 2x^2y^2$$

CIOÈ

$$(x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 = x^4 + y^4$$

E IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 = b \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x+y=a \\ a^4 - 4a^2xy + 2x^2y^2 = b \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO CONSIDERANDO UNA NUOVA
VARIABILE $t=xy$ LA SECONDA EQUAZIONE SARÀ

$$2t^2 - 4a^2t + a^4 - b = 0$$

SISTEMI NON LINEARI

CHE RISOLVENDOLA CI FORNIRÀ 2 SOLUZIONI

$$t_1 = (xy)_1 \quad \text{E} \quad t_2 = (xy)_2$$

IN DEFINITIVA UNENDO LE SOLUZIONI DEI DUE SISTEMI

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=t_1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=a \\ xy=t_2 \end{cases}$$

SI OTTERRANNO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA DI PARTENZA.

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases} \quad a=5 \quad b=257$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 = 257 \end{cases}$$

$$625 - 4xy(25) + 2x^2y^2 - 257 = 0$$

$$2x^2y^2 - 100xy + 368 = 0 \quad \Rightarrow t = xy$$

$$2t^2 - 100t + 368 = 0$$

$$t^2 - 50t + 184 = 0$$

$$\Delta = (-50)^2 - 4(184) = 2500 - 736 = 1764$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-50) \pm \sqrt{1764}}{2} = \frac{50 \pm 42}{2} = \begin{cases} \frac{50-42}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{50+42}{2} = \frac{92}{2} = 46 \end{cases}$$

QUINDI

$$\text{I} \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \cup \text{II} \begin{cases} x+y=5 \\ xy=46 \end{cases}$$

$$\text{I)} \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \quad \text{SOMMA}=5 \quad \text{PRODOTTO}=4$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(4) = 25 - 16 = 9$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5-3}{2} = 1 = x_1 \\ \frac{5+3}{2} = 4 = y_1 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} x+y=5 \\ xy=46 \end{cases} \quad \text{SOMMA}=5 \quad \text{PRODOTTO}=46$$

$$z^2 - 5z + 46 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(46) = 25 - 184 = -159$$

NESSUNA SOLUZIONE

$$\Rightarrow (1, 4) \text{ E } (4, 1)$$

n=5 IN QUESTO CASO IL SISTEMA SARÀ

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^5+y^5=b \end{cases}$$

SEMPRE DAI PRODOTTI NOTEVOLI (TRIANGOLO DI TARTAGLIA)

$$\begin{aligned} (x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ &= x^5 + y^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 \end{aligned}$$

I TERMINI $10x^3y^2$ E $10x^2y^3$ LI SCRIVIAMO COME

$$15x^3y^2 - 5x^3y^2 \quad \text{E} \quad 15x^2y^3 - 5x^2y^3$$

COSÌ

$$(x+y)^5 = x^5 + y^5 + 5x^4y + 15x^3y^2 + 15x^2y^3 + 5xy^4 - 5x^3y^2 - 5x^2y^3$$

RACCOGLIAMO PARZIALMENTE $5xy$

$$(x+y)^5 = x^5 + y^5 + 5xy(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - 5x^3y^2 - 5x^2y^3$$

RACCOGLIAMO PARZIALMENTE $-5x^2y^2$ ED IL CUBO DI BINOMIO

$$(x+y)^5 = x^5 + y^5 + 5xy(x+y)^3 - 5x^2y^2(x+y)$$

CIOÈ

$$(x+y)^5 - 5xy(x+y)^3 + 5x^2y^2(x+y) = x^5 + y^5$$

E IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^5 - 5xy(x+y)^3 + 5x^2y^2(x+y)=b \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x+y=a \\ a^5 - 5a^3xy + 5a^2x^2y^2 = b \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO CONSIDERANDOLA NUOVA VARIABILE $t=xy$ LA SECONDA EQUAZIONE SARÀ

$$5at^2 - 5a^3t + a^5 - b = 0$$

CHE RISOLVENDOLA CI FORNIRÀ 2 SOLUZIONI

$$t_1 = (xy)_1 \quad \text{E} \quad t_2 = (xy)_2$$

E IN DEFINITIVA UNENDO LE SOLUZIONI DEI DUE SISTEMI

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=t_1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=a \\ xy=t_2 \end{cases}$$

SI OTTERRANNO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA DI PARTENZA.

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = -2882 \\ x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2 & b = -2882 \\ t = xy \end{matrix}$$

$$5at^2 - 5a^3t + a^5 - b = 0$$

$$5 \cdot (-2)t^2 - 5(-2)^3t + (-2)^5 - (-2882) = 0$$

$$-10t^2 + 40t + 2850 = 0$$

$$t^2 - 4t - 285 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-285) = 16 + 1140 = 1156$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{1156}}{2} = \frac{4 \pm 34}{2} = \begin{cases} -\frac{30}{2} = -15 \\ \frac{38}{2} = 19 \end{cases}$$

QUINDI

$$\text{I)} \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-15 \end{cases} \cup \text{II)} \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=19 \end{cases}$$

$$\text{I)} \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-15 \end{cases} \Rightarrow \text{SOMMA} = -2 \quad \text{PRODOTTO} = -15$$

$$z^2 + 2z - 15 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-15) = 4 + 60 = 64$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-2-8}{2} = -\frac{10}{2} = -5 = x_1 \\ \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 = y_1 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=19 \end{cases} \Rightarrow \text{SOMMA}=-2 \quad \text{PRODOTO}=19$$

$$z^2 + 2z + 19 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(19) = 4 - 76 = -72$$

NESSUNA SOLUZIONE

$$\Rightarrow (-5, 3) \text{ e } (3, -5)$$

E SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA SI PRESENTI COME

$$\begin{cases} x^n + y^n = a \\ xy = b \end{cases} \quad \text{CON } n \in \mathbb{N}$$

QUESTI SISTEMI POSSONO ESSERE RISOLTI MEDIANTE LE **FORMULE DI WARING** O ANCHE MEDIANTE **IL METODO DI SOSTITUZIONE**.

n=2 IN QUESTO CASO IL SISTEMA SARÁ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

APPLICANDO LE FORMULE DI WARING LA PRIMA EQUAZIONE PUÓ ESSERE SCRITTA COME

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

QUINDI IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = a \\ xy = b \end{cases}$$

COSÌ

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2b = a \\ xy = b \end{cases}$$

ANCORA

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 2b + a \\ xy = b \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO OSSERVANDO LA PRIMA EQUAZIONE SE IL SECONDO MEMBRO È NEGATIVO, CIOÈ SE

$$2b + a < 0$$

ALLORA TALE EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONI DATO CHE IL QUADRATO DI UN NUMERO (PRIMO MEMBRO) NON PUÒ ESSERE MAI NEGATIVO E DI CONSEGUENZA ANCHE IL SISTEMA NON AMMETTE SOLUZIONI.

MENTRE SE

$$2b + a \geq 0$$

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SI OTTENGONO RISOLVENDO

$$\begin{cases} x+y = \pm \sqrt{2b+a} \\ xy = b \end{cases}$$

CHE NEL CASO DI STRETTAMENTE MAGGIORE DI 0 ($2b+a > 0$) EQUIVALE A RISOLVERE DUE SISTEMI DISTINTI

$$\begin{cases} x+y = -\sqrt{2b+a} \\ xy = b \end{cases} \cup \begin{cases} x+y = +\sqrt{2b+a} \\ xy = b \end{cases}$$

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow a=5 \quad b=2$$

$$\begin{cases} x+y = \pm\sqrt{2 \cdot 2 + 5} \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \pm\sqrt{9} \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\text{I} \quad \begin{cases} x+y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\text{SOMMA} = -3$$

$$\text{PRODOTTO} = 2$$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\cup \quad \begin{cases} x+y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\text{SOMMA} = 3$$

$$\text{PRODOTTO} = 2$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$(-2, -1) \cup (-1, -2) \quad \cup \quad (1, 2) \cup (2, 1)$$

OSSERVAZIONE:

POSSIAMO FACILMENTE VERIFICARE CHE IL SISTEMA PRECEDENTE SI PUÒ RISOLVERE ANCHE CON IL CLASSICO METODO DI SOSTITUZIONE. DALLA SECONDA EQUAZIONE RICAVIAMO LA X

$$X = \frac{2}{y}$$

SISTEMI NON LINEARI

SOSTITUENDO TALE ESPRESSIONE NELLA PRIMA EQUAZIONE OTTENIAMO

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5$$

CIOÈ $\frac{4}{y^2} + y^2 = 5$

MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI PER y^2

$$4 + y^4 = 5y^2$$

ANCORA

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0$$

OTTENENDO COSÌ UNA **EQUAZIONE BIQUADRATICA** NEL TERMINE y^2 CHE POSSIAMO INDICARE CON

$$y^2 = t \Rightarrow y^4 = (y^2)^2 = t^2$$

IN MODO CHE RISCRIVENDOLA NON SARÀ ALTRO CHE UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO IN t , CIOÈ

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

E RISOLVENDOLA OTTERREMO DUE SOLUZIONI PER t

$$\Delta = (-5)^2 - 4(4) = 25 - 16 = 9 \quad t_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

DA QUESTE POSSIAMO OTTENERE I VALORI DELLA y MEDIANTE LA RELAZIONE

$$t = y^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{t}$$

COSÌ

$$y = \pm \sqrt{t_1} = \begin{cases} -\sqrt{1} = -1 = y_1 \\ +\sqrt{1} = +1 = y_2 \end{cases}$$

E

$$y = \pm \sqrt{t_2} = \begin{cases} -\sqrt{4} = -2 = y_3 \\ +\sqrt{4} = +2 = y_4 \end{cases}$$

IN DEFINITIVA MEDIANTE I VALORI DI y E LA SECONDA EQUAZIONE $x = \frac{z}{y}$ OTTENIAMO I VALORI DELLA x , CIOÈ

$$x_1 = \frac{z}{y_1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$x_2 = \frac{z}{y_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_3 = \frac{z}{y_3} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_4 = \frac{z}{y_4} = \frac{2}{2} = 1$$

QUINDI LE SOLUZIONI SONO

$$(-2, -1) \quad (2, 1) \quad (-1, -2) \quad (1, 2)$$

$n > 2$

NEL CASO L'ESPOLENTE DELLA x E DELLA y NELLA LORO SOMMA, SIA MAGGIORE DI 2, PER RISOLVERE IL SISTEMA POSSIAMO SFRUTTARE DIRETTAMENTE IL METODO DI SOSTITUZIONE SENZA RICORRERE AL METODO DI WARRING IL QUALE PUÒ RICHIEDERE CALCOLI PIÙ COMPLESSI. VEDIAMO ALCUNI ESEMPI

$n=3$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = -26 \\ xy = -3 \end{cases}$$

SISTEMI NON LINEARI

DALLA SECONDA EQUAZIONE RICAVIAMO LA X

$$X = -\frac{3}{y}$$

CHE SOSTITUIAMO NELLA PRIMA OTTENENDO

$$\left(-\frac{3}{y}\right)^3 + y^3 = -26$$

CIOÈ

$$-\frac{27}{y^3} + y^3 + 26 = 0$$

ANCORA

$$y^6 + 26y^3 - 27 = 0$$

PONIAMO $y^3 = t$ E $y^6 = (y^3)^2 = t^2$ COSÌ

$$t^2 + 26t - 27 = 0$$

$$\Delta = (-26)^2 - 4(-27) = 676 + 108 = 784$$

$$t_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2} = \begin{cases} \frac{-26-28}{2} = \frac{-54}{2} = -27 \\ \frac{-26+28}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

MA

$$y^3 = t \Rightarrow y = \sqrt[3]{t}$$

QUINDI

$$y_1 = \sqrt[3]{-27} = -3$$

E

$$y_2 = \sqrt[3]{1} = 1$$

ED INFINE

$$X_1 = -\frac{3}{y_1} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad \text{E} \quad X_2 = \frac{-3}{1} = -3$$

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO

$$(1, -3) \quad (-3, 1)$$

$n=4$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{2}{y}\right)^4 + y^4 = 17 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{2}{y}\right)^4 + y^4 = 17$$

$$\frac{16}{y^4} + y^4 = 17$$

$$16 + y^8 = 17y^4$$

$$y^8 - 17y^4 + 16 = 0 \Rightarrow y^4 = t \quad y^8 = (y^4)^2 = t^2$$

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

$$\Delta = (-17)^2 - 4(16) = 289 - 64 = 225$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2} = \begin{cases} \frac{17-15}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{17+15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \end{cases}$$

MA

$$y^4 = t \Rightarrow y = \pm \sqrt[4]{t}$$

COSÌ

$$y = \pm \sqrt[4]{1} = \begin{cases} -1 = y_1 \\ +1 = y_2 \end{cases} \quad \text{E} \quad y = \pm \sqrt[4]{16} = \begin{cases} -2 = y_3 \\ +2 = y_4 \end{cases}$$

QUINDI

$$X_1 = \frac{-2}{y_1} = \frac{-2}{-1} = 2 \quad X_2 = \frac{-2}{y_2} = \frac{-2}{+1} = -2 \quad X_3 = \frac{-2}{y_3} = \frac{-2}{-2} = +1 \quad X_4 = \frac{-2}{y_4} = \frac{-2}{+2} = -1$$

E LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO

$$(2, -1) \quad (-2, 1) \quad (1, -2) \quad (-1, 2)$$

$n=5$

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 31 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^5 + y^5 = 31 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{2}{y}\right)^5 + y^5 = 31 \\ x = -\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{2}{y}\right)^5 + y^5 = 31$$

$$-\frac{32}{y^5} + y^5 = 31$$

$$-32 + y^{10} = 31y^5$$

$$y^{10} - 31y^5 - 32 = 0 \Rightarrow y^5 = t \quad y^{10} = (y^5)^2 = t^2$$

$$t^2 - 31t - 32 = 0$$

$$\Delta = -(-31)^2 - 4(-32) = 961 + 128 = 1089$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-31) \pm \sqrt{1089}}{2} = \begin{cases} \frac{31-33}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ \frac{31+33}{2} = \frac{64}{2} = 32 \end{cases}$$

MA

$$y^5 = t \Rightarrow y = \sqrt[5]{t}$$

$$y_1 = \sqrt[5]{-1} = -1$$

$$y_2 = \sqrt[5]{32} = 2$$

così

$$x_1 = -\frac{2}{y_1} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$x_2 = -\frac{2}{y_2} = -\frac{2}{2} = -1$$

E LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO

$$(2, -1) \quad (-1, 2)$$

SISTEMI NON LINEARI OMOGENEI

UN SISTEMA NON LINEARE SI DICE OMOGENEO QUANDO LE EQUAZIONI CHE LO COMPONGONO HANNO TUTTI I TERMINI DELLO STESSO GRADO.

SE IL SISTEMA È DI 2° GRADO, CIOÈ È FORMATO DA UNA EQUAZIONE DI 1° GRADO ED UNA DI 2° GRADO, COME AD ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 100 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

ALLORA, COME GIÀ VISTO NELLA LEZIONE SUI SISTEMI DI 2° GRADO, LO POSSIAMO RISOLVERE CON IL METODO

DI SOSTITUZIONE ESPLICITANDO UNA DELLE DUE

INCOGNITE NELLA EQUAZIONE DI 1° GRADO E SOSTITUENDOLA NELLA EQUAZIONE DI 2° GRADO.

SE INVECE IL SISTEMA È DI 4° GRADO, CIOÈ È COSTITUITO DA DUE EQUAZIONI DI 2° GRADO DEL TIPO:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

ALLORA BISOGNA DISTINGUERE 3 DIVERSI CASI

A SECONDA DEL VALORE DEI TERMINI NOTI d E d' .

1° CASO

$d=0$ E $d'=0$

ENTRAMBI I TERMINI NOTI SONO NULLI E IL SISTEMA SI PRESENTA COME:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0 \end{cases}$$

SISTEMI NON LINEARI

NATURALMENTE QUESTO TIPO DI SISTEMA AMMETTE SEMPRE ALMENO LA SOLUZIONE BANALE $(0,0)$ - SE OLTRE A QUESTA AMMETTE ALTRE SOLUZIONI, ALLORA QUESTE SONO INFINITE -

PER LA SUA RISOLUZIONE PROCEDIAMO PONENDO LA SOSTITUZIONE

$$y = tx \quad \text{CON } t \in \mathbb{R}$$

COSÌ IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} ax^2 + bxtx + ct^2x^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xtx + c't^2x^2 = 0 \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} ax^2 + bt^2x^2 + ct^2x^2 = 0 \\ a'x^2 + b't^2x^2 + c't^2x^2 = 0 \end{cases}$$

RACCOGLIENDO x^2 SI OTTIENE

$$\begin{cases} x^2(a + bt + ct^2) = 0 \\ x^2(a' + b't + c't^2) = 0 \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO ESCLUDENDO LA SOLUZIONE BANALE $(0,0)$ POSSIAMO DIVIDERE ENTRAMBE LE EQUAZIONI PER x^2 IN QUANTO SICURAMENTE $x \neq 0$, E RIORDINANDO I TERMINI OTTENIAMO

$$\begin{cases} ct^2 + bt + a = 0 \\ c't^2 + b't + a' = 0 \end{cases}$$

DUE EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE NELLA VARIABILE t .

SE QUESTE EQUAZIONI NON AMMETTONO SOLUZIONI COMUNI ALLORA IL SISTEMA AMMETTE LA SOLA SOLUZIONE BANALE $(0,0)$ ALTRIMENTI AMMETTERÀ INFINITE SOLUZIONI -

SISTEMI NON LINEARI

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x^2 + 7xy - 15y^2 = 0 \\ 5x^2 + 27xy + 10y^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = tx$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 7xtx - 15t^2x^2 = 0 \\ 5x^2 + 27xtx + 10t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 7tx^2 - 15t^2x^2 = 0 \\ 5x^2 + 27tx^2 + 10t^2x^2 = 0 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$\begin{cases} -15t^2 + 7t + 2 = 0 \\ 10t^2 + 27t + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15t^2 - 7t - 2 = 0 & \text{I} \\ 10t^2 + 27t + 5 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I} \quad \Delta = (-7)^2 - 4(15)(-2) = 49 + 120 = 169$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 15} = \frac{7 \pm 13}{30} = \begin{cases} \frac{7-13}{30} = -\frac{6}{30} = -\frac{1}{5} \\ \frac{7+13}{30} = \frac{20}{30} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \Delta = (27)^2 - 4(10)(5) = 729 - 200 = 529$$

$$t_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 10} = \frac{-27 \pm 23}{20} = \begin{cases} \frac{-27-23}{20} = -\frac{50}{20} = -\frac{5}{2} \\ \frac{-27+23}{20} = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

L'UNICA SOLUZIONE IN COMUNE È $t = -\frac{1}{5}$, PERTANTO
OLTRE ALLA SOLUZIONE (0,0) IL SISTEMA AMMETTE
INFINITE SOLUZIONI CHE POSSIAMO SCRIVERE
COME

$$\left(x, -\frac{1}{5}x \right)$$

SISTEMI NON LINEARI

2° CASO

$d=0$ e $d' \neq 0$

UNO DEI DUE TERMINI NOTI È NULO MENTRE L'ALTRO È DIVERSO DA ZERO E IL SISTEMA SI PRESENTA COME:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

PROCEDIAMO SEMPRE PONENDO LA SOSTITUZIONE

$$y = tx \quad \text{CON } t \in \mathbb{R}$$

COSÌ IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} ax^2 + bxtx + ct^2x^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xtx + c't^2x^2 = d' \end{cases}$$

RACCOGLIAMO x^2 IN ENTRAMBE LE EQUAZIONI

$$\begin{cases} x^2(a + bt + ct^2) = 0 \\ x^2(a' + b't + c't^2) = d' \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO PONENDO SEMPRE $x \neq 0$ DIVIDIAMO LA PRIMA EQUAZIONE PER x^2 E NE RIORDINIAMO I TERMINI OTTENENDO

$$\begin{cases} ct^2 + bt + a = 0 \\ x^2(a' + b't + c't^2) = d' \end{cases}$$

CHE LA PRIMA EQUAZIONE È DI 2° GRADO COMPLETA NELLA VARIABILE " t ".

LA RISOLVIAMO E SOSTITUIAMO I VALORI TROVATI DI " t " NELLA SECONDA EQUAZIONE RICAVANDO COSÌ I VALORI DI x TRAMITE I QUALI DETERMINIAMO SUCCESSIVAMENTE I VALORI DI y .
VEDIAMO UN ESEMPIO:

$$\begin{cases} x^2 - 8xy + 15y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y = tx$$

$$\begin{cases} x^2 - 8xtx + 15t^2x^2 = 0 \\ x^2 - 2xtx + t^2x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8tx^2 + 15t^2x^2 = 0 \\ x^2 - 2tx^2 + t^2x^2 = 1 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$\begin{cases} 15t^2 - 8t + 1 = 0 \\ x^2(1 - 2t + t^2) = 1 \end{cases}$$

$$15t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(15)(1) = 64 - 60 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 15} = \frac{8 \pm 2}{30} = \begin{cases} \frac{8-2}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \\ \frac{8+2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$X_1: x^2 \left[1 - 2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right] = 1$$

$$\Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \right) = 1 \Rightarrow x^2 \left(\frac{25 - 10 + 1}{25} \right) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 \left(\frac{16}{25} \right) = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \cdot \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = \pm \frac{5}{4}$$

$$X_{3,4}: x^2 \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) = 1 \Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 \left(\frac{9 - 6 + 1}{9} \right) = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

così

$$y_1 = tx = \frac{1}{5} \left(-\frac{5}{4} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{3} \left(+\frac{5}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

SISTEMI NON LINEARI

$$y_3 = tx = \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$y_4 = tx = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

QUINDI LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO:

$$\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4} \right) \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

3 CASO

$d \neq 0$ e $d' \neq 0$

ENTRAMBI I TERMINI NOTI SONO DIVERSI DA ZERO E IL SISTEMA SI PRESENTA COME:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

PONIAMO LA SOSTITUZIONE

$$y = tx \quad \text{CON } t \in \mathbb{R}$$

COSÌ IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} ax^2 + bxtx + ct^2x^2 = d \\ a'x^2 + b'xtx + c't^2x^2 = d' \end{cases}$$

RACCOGLIAMO x^2 IN ENTRAMBE

$$\begin{cases} x^2(a + bt + ct^2) = d \\ x^2(a' + b't + c't^2) = d' \end{cases}$$

A QUESTO PUNTO DIVIDIAMO MEMBRO A MEMBRO LE 2 EQUAZIONI ED OTTENIAMO L'EQUAZIONE

$$\frac{a + bt + ct^2}{a' + b't + c't^2} = \frac{d}{d'}$$

CIOÈ

$$d'(a + bt + ct^2) = d(a' + b't + c't^2)$$

$$cd't^2 - c'dt^2 + bd't - b'dt + ad' - a'd = 0$$

$$(cd' - c'd)t^2 + (bd' - b'd)t + ad' - a'd = 0$$

SISTEMI NON LINEARI

CHE È UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO NELL'INCOGNITA "t"
TROVATE LE SOLUZIONI t_1 E t_2 SI PROCEDE
POI A RISOLVERE I SISTEMI

$$\begin{cases} y = t_1 x \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases} \quad \text{E} \quad \begin{cases} y = t_2 x \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 4y^2 = 10 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -11 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=1 & b=5 & c=4 & d=10 \\ a'=1 & b'=-2 & c'=-3 & d'=-11 \end{matrix}$$

APPLICHIAMO DIRETTAMENTE L'EQUAZIONE IN "t"

$$(cd' - c'd)t^2 + (bd' - b'd)t + ad' - a'd = 0$$

$$\begin{aligned} [4(-11) - (-3)10]t^2 + [5(-11) - (-2)10]t + 1(-11) - 1(10) &= 0 \\ (-44 + 30)t^2 + (-55 + 20)t - 21 &= 0 \\ -14t^2 - 35t - 21 &= 0 \end{aligned}$$

$$14t^2 + 35t + 21 = 0$$

$$2t^2 + 5t + 3 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{-5-1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \frac{-5+1}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \end{cases}$$

QUINDI

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -11 \end{cases} \quad \text{E} \quad \begin{cases} y = -x \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\left(-\frac{3}{2}x\right) - 3\left(-\frac{3}{2}x\right)^2 &= -11 & x^2 - 2x(-x) - 3(-x)^2 &= -11 \\ x^2 + 3x^2 - \frac{27}{4}x^2 &= -11 & x^2 + 2x^2 - 3x^2 &= -11 \\ 4x^2 + 12x^2 - 27x^2 &= -44 & 0 &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -11x^2 &= -44 \end{aligned}$$

IMPOSSIBILE

$$x^2 = \frac{-14}{-11} = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$y_1 = -\frac{3}{2}x_1 = -\frac{3}{2}(-2) = 3 \quad y_2 = -\frac{3}{2}x_2 = -\frac{3}{2}(2) = -3$$

LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO

$$(-2, 3) \quad (2, -3)$$

ESERCIZI DI RIEPILOGO

1 $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases}$ SOMMA=1 PRODOTTO=-6

$$z^2 - z - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-6) = 1 + 24 = 25$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$(-2, 3) \quad (3, -2)$$

2 $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases}$ $x'=2x \Rightarrow x=\frac{x'}{2}$
 $y'=-3y \Rightarrow y=\frac{y'}{-3}$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{x'}{2}\right) - 3\left(\frac{y'}{-3}\right) = 8 \\ \left(\frac{x'}{2}\right)\left(-\frac{y'}{3}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + y' = 8 \\ -x'y' = 2 \cdot 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + y' = 8 & \text{SOMMA} = 8 \\ x'y' = -12 & \text{PRODOTTO} = -12 \end{cases}$$

$$z^2 - 8z - 12 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(-12) = 64 + 48 = 112$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{112}}{2}$$

SCOMPONIAMO 112 IN MODO DA POTER RISCRIVERNE LA RADICE

$$\begin{array}{r|l} 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 112 = 2^4 \cdot 7 \quad \text{E} \quad \sqrt{112} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 7}$$

QUINDI

$$\sqrt{112} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

COSÌ

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{7}}{2} = \frac{4(2 \pm \sqrt{7})}{2} = 2(2 \pm \sqrt{7}) = \begin{cases} 4 - 2\sqrt{7} = z_1 \\ 4 + 2\sqrt{7} = z_2 \end{cases}$$

MA

$$x = \frac{x'}{2} \quad \text{E} \quad y = -\frac{y'}{3}$$

CIOÈ

$$x_1 = \frac{z_1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7} \quad y_1 = -\frac{z_2}{3} = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{3}$$

$$x_2 = \frac{z_2}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7} \quad y_2 = -\frac{z_1}{3} = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{3}$$

$$(2 - \sqrt{7}, \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{3}) \quad (2 + \sqrt{7}, \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{3})$$

$$3 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{SOMMA} = 0$$

SAPENDO CHE

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 1 \\ x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0)^2 - 2xy = 1 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -\frac{1}{2} \\ x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{PRODOTTO} = -\frac{1}{2}$$

$$z^2 - 0 \cdot z - \frac{1}{2} = 0$$

$$z^2 = \frac{1}{2}$$

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$4 \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ e } b=9$$

$$z^2 - az + \frac{a^3 - b}{3a} = 0$$

$$z^2 - 3z + \frac{3^3 - 9}{3 \cdot 3} = 0$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$(1, 2) (2, 1)$$

5 $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow a=0 \text{ e } b=2$

$$2t^2 - 4a^2t + a^4 - b = 0$$

$$2t^2 - 2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1$$

$$t_{1,2} = \pm 1$$

$$\begin{cases} xy = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

U

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

SOMMA=0

PRODOTTO=-1

$$z^2 - 0z - 1 = 0$$

$$z^2 = 1 \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

SOMMA=0

PRODOTTO=1

$$z^2 - 0z + 1 = 0$$

$$z^2 = -1 \text{ NESSUNA SOLUZIONE}$$

$$(1, -1) (-1, 1)$$

6 $\begin{cases} x^5 + y^5 = 64 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow a=4 \text{ e } b=64$

$$5at^2 - 5a^3t + a^5 - b = 0$$

$$5 \cdot 4t^2 - 5 \cdot 4^3t + 4^5 - 64 = 0$$

$$20t^2 - 320t + 960 = 0$$

$$t^2 - 16t + 48 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4(48) = 256 - 192 = 64$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{16 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{24}{2} = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$z^2 - 4z + 4 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4) = 16 - 16 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\cup \begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$z^2 - 4z + 12 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(12) = 16 - 48 = -32$$

NESSUNA SOLUZIONE

(2, 2)

7
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ y = \frac{15}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{15}{x}\right)^2 = 34 \\ y = \frac{15}{x} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{225}{x^2} = 34$$

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0 \Rightarrow x^2 = t \quad x^4 = (x^2)^2 = t^2$$

$$t^2 - 34t + 225 = 0$$

$$\Delta = (-34)^2 - 4(225) = 1156 - 900 = 256$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-34) \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{34 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{34-16}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{34+16}{2} = \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

$$x^2 = t \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{25} \Rightarrow x_{3,4} = \pm 5$$

$$y = \frac{15}{x} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \frac{15}{-3} = -5 & y_2 &= \frac{15}{3} = 5 \\ y_3 &= \frac{15}{-5} = -3 & y_4 &= \frac{15}{5} = 3 \end{aligned}$$

$$(-3, -5) \quad (3, 5) \quad (-5, -3) \quad (5, 3)$$

8 $\begin{cases} x^3 + y^3 = -35 \\ xy = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = -35 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + \left(\frac{6}{x}\right)^3 = -35 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = -35$$

$$x^6 + 35x^3 + 216 = 0 \Rightarrow x^3 = t \quad x^6 = (x^3)^2 = t^2$$

$$t^2 + 35t + 216 = 0$$

$$\Delta = (+35)^2 - 4(216) = 1225 - 864 = 361$$

$$t_{1,2} = \frac{-(+35) \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-35 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-35-19}{2} = \frac{-54}{2} = -27 \\ \frac{-35+19}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \end{cases}$$

$$x^3 = t \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-8} = -2 & y_1 &= \frac{6}{-2} = -3 \\ x_2 &= \sqrt[3]{-27} = -3 & y_2 &= \frac{6}{-3} = -2 \end{aligned}$$

$$(-2, -3) \quad (-3, -2)$$

$$9 \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 2$$

$$x^8 - 2x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = t \quad x^8 = (x^4)^2 = t^2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1) = 4 - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x^4 = t \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{-1} = -1 \quad y_2 = \frac{1}{1} = 1$$

$$(-1, -1) \quad (1, 1)$$

$$10 \quad \begin{cases} x^5 + y^5 = 31 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 31 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^5 + \left(-\frac{2}{x}\right)^5 = 31 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

$$x^5 - \frac{32}{x^5} = 31$$

$$x^{10} - 31x^5 - 32 = 0 \Rightarrow x^5 = t \quad x^{10} = (x^5)^2 = t^2$$

$$\Delta = (-31)^2 - 4(-32) = 961 + 128 = 1089$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-31) \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{31 \pm 33}{2} = \begin{cases} -\frac{2}{2} = -1 \\ \frac{64}{2} = 32 \end{cases}$$

$$x^5 = t \Rightarrow x_1 = \sqrt[5]{-1} = -1$$

$$x_2 = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$y = -\frac{2}{x} \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$y_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$(-1, 2) \quad (2, -1)$$

11
$$\begin{cases} 45y^2 + 14x^2 = 53xy \\ 36y^2 + 17xy = 35x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x^2 - 53xy + 45y^2 = 0 \\ 35x^2 - 17xy - 36y^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = tx$$

$$\begin{cases} 14x^2 - 53xtx + 45t^2x^2 = 0 \\ 35x^2 - 17xtx - 36t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(14 - 53t + 45t^2) = 0 \\ x^2(35 - 17t - 36t^2) = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0$$

$$\begin{cases} 45t^2 - 53t + 14 = 0 & \text{I} \\ 36t^2 + 17t - 35 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I) } 45t^2 - 53t + 14 = 0$$

$$\Delta = (-53)^2 - 4(45)(14) = 2809 - 2520 = 289$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-53) \pm \sqrt{289}}{2 \cdot 45} = \frac{53 \pm 17}{90} = \begin{cases} \frac{53-17}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5} \\ \frac{53+17}{90} = \frac{70}{90} = \frac{7}{9} \end{cases}$$

II) $36t^2 + 17t - 35 = 0$

$$\Delta = (17)^2 - 4(36)(-35) = 289 + 5040 = 5329$$

$$t_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{5329}}{2 \cdot 36} = \frac{-17 \pm 73}{72} = \begin{cases} \frac{-17-73}{72} = -\frac{90}{72} = -\frac{5}{4} \\ \frac{-17+73}{72} = \frac{56}{72} = \frac{7}{9} \end{cases}$$

L'UNICA SOLUZIONE IN COMUNE È $\frac{7}{9}$ QUINDI

$$\left(x, \frac{7}{9}x\right)$$

12 $\begin{cases} 9y^2 + 12xy + 4x^2 = 9 \\ 4y^2 + 33xy + 8x^2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 9 \\ 8x^2 + 33xy + 4y^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = tx$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 12xtx + 9t^2x^2 = 9 \\ 8x^2 + 33xtx + 4t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(4 + 12t + 9t^2) = 9 \\ \cancel{x^2}(8 + 33t + 4t^2) = 0 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$4t^2 + 33t + 8 = 0$$

$$\Delta = (33)^2 - 4(4)(8) = 1089 - 128 = 961$$

$$t_{1,2} = \frac{-33 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 4} = \frac{-33 \pm 31}{8} = \begin{cases} \frac{-64}{8} = -8 \\ \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

COSÌ DALLA PRIMA EQUAZIONE

$$t_1: X^2 [4 + 12(-8) + 9(-8)^2] = 9$$

$$X^2 (4 - 96 + 576) = 9$$

$$484 X^2 = 9$$

$$X^2 = \frac{9}{484} \Rightarrow X_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{9}{484}} = \pm \frac{3}{22}$$

$$t_2: X^2 [4 + 12(-\frac{1}{4}) + 9(-\frac{1}{4})^2] = 9$$

$$X^2 (4 - 3 + \frac{9}{16}) = 9$$

$$\frac{25}{16} X^2 = 9$$

$$X^2 = 9 \cdot \frac{16}{25} \Rightarrow X_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25}} = \pm \frac{12}{5}$$

ED AVENDO POSTO $y = tX$

$$y_1 = (-8)(-\frac{3}{22}) = +\frac{24}{22} = \frac{12}{11} \quad y_2 = (-8)(\frac{3}{22}) = -\frac{24}{22} = -\frac{12}{11}$$

$$y_3 = (-\frac{1}{4})(-\frac{12}{5}) = +\frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad y_4 = (-\frac{1}{4})(\frac{12}{5}) = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5}$$

QUINDI

$$\left(-\frac{3}{22}, \frac{12}{11}\right) \left(\frac{3}{22}, -\frac{12}{11}\right) \left(-\frac{12}{5}, \frac{3}{5}\right) \left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

$$13 \begin{cases} 108y^2 + 3xy + 4x^2 = 12 \\ 969y^2 + 23xy + 36x^2 = 108 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 3xy + 108y^2 = 12 & a=4 \quad b=3 \quad c=108 \quad d=12 \\ 36x^2 + 23xy + 969y^2 = 108 & a'=36 \quad b'=23 \quad c'=969 \quad d'=108 \end{cases}$$

$$(cd' - c'd)t^2 + (bd' - b'd)t + ad' - a'd = 0$$

con $y = tx$

$$(108 \cdot 108 - 969 \cdot 12)t^2 + (3 \cdot 108 - 23 \cdot 12)t + (4 \cdot 108 - 36 \cdot 12) = 0$$

$$36t^2 + 48t = 0$$

$$3t^2 + 4t = 0$$

$$t(3t + 4) = 0 \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

così

$$\begin{cases} y = 0 \cdot x \\ 4x^2 + 3xy + 108y^2 = 12 \end{cases}$$

$$4x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$$\cup \begin{cases} y = -\frac{4}{3}x \\ 4x^2 + 3xy + 108y^2 = 12 \end{cases}$$

$$4x^2 + 3x(-\frac{4}{3}x) + 108(-\frac{4}{3}x)^2 = 12$$

$$4x^2 - 4x^2 + 192x^2 = 12$$

$$192x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{192} = \frac{1}{16}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}$$

QUINDI

$$y = tx$$

$$y_1 = 0 \cdot (-\sqrt{3}) = 0$$

$$y_2 = 0 \cdot +\sqrt{3} = 0$$

$$y_3 = -\frac{4}{3}(-\frac{1}{4}) = +\frac{1}{3}$$

$$y_4 = -\frac{4}{3}(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{3}$$

$$(-\sqrt{3}, 0) \quad (\sqrt{3}, 0) \quad (-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \quad (\frac{1}{4}, -\frac{1}{3})$$